

UNIVERSIDAD DE SEVILLA
Facultad de Matemáticas



Grado en Matemáticas
Departamento de Geometría y Topología

Curvas Rectificantes

Trabajo Fin de Grado

por

Francisco Jácome Maura

Sevilla, Junio de 2017

Índice general

Abstract	III
Resumen	IV
Introducción	v
1. Conceptos Previos	1
1.1. Ecuaciones de Frenet-Serret. Vector de Darboux.	3
2. Curvas Rectificantes	6
2.1. Primeros pasos.	6
2.2. Caracterización de Curvas Rectificantes.	11
2.3. Curvas Rectificantes como Centroides.	18
2.4. Curvas rectificantes como curvas extremales.	21
2.5. Otras propiedades de las curvas rectificantes.	25
Anexo: Códigos de Maple	28
Bibliografía	32

Abstract

Rectifying curves are curves whose position vector always lies in their rectifying plane. In this dissertation, we present several equivalent conditions for a curve to be rectifying, giving a characterization formula that will allow us to find examples. In addition, we will expose the relationship between the Darboux vector and the rectifying curves and we will prove they are extremal curves. Finally, we define the reciprocal and the dual of a given curve and link them with both the Gauss map and rectifying curves.

Resumen

Las curvas rectificantes son las curvas cuyo vector posición siempre está contenido en su plano rectificante. En este texto se presentan varias condiciones equivalentes a que una curva sea rectificante, dando una fórmula que las caracteriza y permite encontrar ejemplos de las mismas. Además, se pone en relación el vector de Darboux con las curvas rectificantes y se demuestra que éstas son curvas extremales. Por último, se definen la curva recíproca y la curva dual de una curva dada y se vinculan con la aplicación de Gauss y las curvas rectificantes.

Introducción

Dentro de la Geometría Local de Curvas Diferenciables resulta fundamental la construcción del triedro de Frenet-Serret asociado a cada punto de una curva alabeada. Surgen de manera natural los conceptos de plano osculador, normal y rectificante tomando dos a dos los vectores del triedro.

A partir de la teoría clásica ya era sabido que el vector posición de una curva diferenciable está contenido en su plano osculador si y sólo si la curva es plana, y también era conocido que esto sucede con su plano normal si y sólo si la curva está contenida en la esfera unitaria S^2 . Sin embargo, no se sabía cuándo sucedía lo mismo con el plano rectificante. Fue Bang-Yen Chen, profesor e investigador de la Universidad de Michigan, el primero en referirse a este tipo de curvas como *Curvas Rectificantes* en un artículo de 2003, [1] en la Bibliografía. Éste fue el punto de partida de una serie de artículos, algunos del mismo autor, que se centran en las propiedades de estas curvas. Se han llegado incluso a estudiar en el espacio de Minkowski 3-dimensional y en \mathbb{R}^4 , como puede verse en [6] y [5].

No obstante, si bien Chen fue el primero en darles nombre a las curvas rectificantes, el propio autor menciona en [2] que ya se habían tratado estas curvas en [7]. De hecho, en este artículo de 1993 se demuestra en el Teorema B una condición equivalente a que una curva sea congruente a una curva rectificante, aunque no se le dé tal denominación.

Este trabajo se basa principalmente en [1] y [3], los dos primeros artículos que escribió Chen sobre curvas rectificantes. El Capítulo 1 aúna algunos conceptos y resultados clásicos de geometría local de curvas, como son la parametrización natural, la definición de curvatura y torsión, las ecuaciones de Frenet-Serret, el Teorema Fundamental de Curvas Alabeadas y la definición de curvatura normal y geodésica de una curva en una superficie simple. Se define además el vector de Darboux como el vector velocidad areolar del Triedro de Frenet. Se asienta así la teoría necesaria para el desarrollo del Capítulo 2.

En este capítulo, dividido en cinco secciones, se trata de dar una visión general de las curvas rectificantes, acompañando el texto de algunas gráficas para hacer la lectura más amena y comprensible.

En la primera sección se demuestran los resultados mencionados anteriormente sobre cuándo una curva tiene su vector posición contenido en su plano osculador o rectificante. Se da un primer teorema donde se muestran propiedades equivalentes a que una curva sea rectificante. Asimismo se obtiene como corolario que si una curva rectificante está parametrizada naturalmente su vector posición tiene la misma dirección que su vector de Darboux. La sección termina probando que una curva cumple $\tau/k = (s+b)/a$ si y sólo si es congruente a una curva rectificante (esta es la condición equivalente mencionada antes).

En la segunda se caracterizan las curvas rectificantes como aquellas que vienen dadas por $\alpha(t) = a \sec(t + t_0) \mathbf{y}(t)$, donde $\mathbf{y}(t)$ es una curva regular parametrizada naturalmente contenida en la esfera unidad y t_0 y a son constantes con $a \neq 0$. Además, se dan dos pruebas distintas de este resultado, que se usa constantemente en las secciones tres y cuatro. La sección cierra con las Figuras 2.3 y 2.4, donde se da un ejemplo de curva rectificante construida mediante la caracterización dada.

En la sección tercera se estudia en primer lugar cuándo es el centroide de una curva regular parametrizada naturalmente una curva rectificante, siendo el centroide la curva dada por el vector de Darboux en cada instante. Se definen posteriormente sus cocentroides, que también serán curvas rectificantes en las condiciones del teorema anterior.

En la cuarta sección se muestra que todas las curvas con la misma proyección esférica ρ satisfacen $k_g^2 \leq v^4 k^2 / \rho^2$, siendo las curvas rectificantes las únicas de entre todas ellas donde se alcanza la igualdad. Como corolario, se establece una caracterización de las curvas con curvatura constante no nula y torsión lineal.

En la quinta y última se definen la curva recíproca y la curva dual de una curva dada, presentando un teorema con nuevas condiciones equivalentes a que una curva sea rectificante.

Se añade finalmente un anexo donde se encuentra el código que se ha usado para generar las gráficas del capítulo anterior con el programa Maple.

Capítulo 1

Conceptos Previos

Sea una curva $\alpha : (a, b) \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3$ suficientemente diferenciable¹ y **regular**, es decir, tal que $\alpha'(s) \neq 0$ para todo $s \in (a, b)$.² Diremos además que α está **parametrizada naturalmente**, es decir, que para todo $s \in (a, b)$ cumple $|\alpha'(s)| = 1$. Abreviando, nos referiremos a una curva con las propiedades anteriores como una **c.r.p.n.**

Debe aclararse que podemos asumir que la curva α está parametrizada naturalmente porque en caso contrario siempre podría **reparametrizarse regularmente** mediante su longitud de arco para que su velocidad $|\alpha'(s)|$ sea unitaria. Veamos esto más detenidamente:

Definición 1.0.1. Sea una curva regular $\alpha : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}^3$. Una **reparametrización regular** de α es una función biyectiva $f : (c, d) \longrightarrow (a, b) : r \longmapsto f(r)$ suficientemente diferenciable y regular, es decir, tal que $f'(r) \neq 0$ en todo punto $r \in (c, d)$.

En estas condiciones, la curva $\beta = \alpha \circ f$ tiene el mismo conjunto imagen que α y también es regular, ya que

$$\beta'(r) = \frac{d\beta}{dr} = \frac{d\alpha}{dt} \frac{dt}{dr} = \alpha'(t) \frac{df}{dr} \neq 0.$$

Definición 1.0.2. Dada una curva regular $\alpha : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}^3$, se define su longitud de arco entre t_0 y t como $\int_{t_0}^t |\alpha'(\sigma)| d\sigma$.

¹En este texto bastará suponer que $\alpha \in C^3$.

²Esta condición es necesaria porque evita que las curvas tengan puntos 'angulosos', donde el vector tangente no estaría bien definido. Por ejemplo, la curva $g(t) = (t^2, t^3)$ no es regular porque su derivada se anula en $t = 0$, dejando una forma picuda en la curva.

Puede probarse que si $s = g(t) = \int_{t_0}^t |\alpha'(\sigma)| d\sigma$, la función $f = g^{-1}$ define una reparametrización regular. Cualquier curva puede, por tanto, ser reparametrizada naturalmente.³

Por ello, supondremos de ahora en adelante que $\alpha = \alpha(s)$ es una c.r.p.n. En estas condiciones, $\alpha'(s) \cdot \alpha'(s) = |\alpha'(s)|^2 = 1$ y derivando, $2(\alpha'(s) \cdot \alpha''(s)) = 0$. Definiendo el **campo vectorial tangente**⁴ de α en s como $\mathbf{t} = \alpha'(s)$, llegamos a que $\mathbf{t}(s)$ y $\mathbf{t}'(s)$ son perpendiculares. Definimos ahora $\mathbf{n}(s)$ como el normalizado de $\mathbf{t}'(s)$ (es decir, $\mathbf{t}'(s)/|\mathbf{t}'(s)|$) y lo llamaremos **campo vectorial normal** de α en s .⁵

Como $\mathbf{t}'(s)$ es paralelo a $\mathbf{n}(s)$, debe existir una función escalar $k(s)$ verificando $\mathbf{t}'(s) = k(s)\mathbf{n}(s)$ que denominaremos **curvatura** de α . Nótese que por definición, $k(s) = |\mathbf{t}'(s)| = |\alpha''(s)|$ para todo $s \in (a, b)$. En el caso en el que $\alpha''(s) = 0$ para todo s , integrando dos veces, $\alpha(s) = as + b$ será una recta. Se dirá que las rectas tienen curvatura nula.

Podemos obtener ahora un tercer campo de vectores \mathbf{b} ortonormal a \mathbf{t} y a \mathbf{n} como $\mathbf{b}(s) = \mathbf{t}(s) \times \mathbf{n}(s)$. Lo llamaremos **campo vectorial binormal** de α . Tenemos entonces que a cada punto de la curva α se le pueden asociar tres vectores ortonormales que resultan centrales en la teoría local de curvas.

Definición 1.0.3. Sea $\alpha = \alpha(s)$ una c.r.p.n. Al triedro de vectores

$$\{\mathbf{t}(s), \mathbf{n}(s), \mathbf{b}(s)\} \quad (1.1)$$

se le llama **Triedro de Frenet** en el punto $\alpha(s)$ de α . Este triedro forma un sistema de referencia ortonormal de \mathbb{R}^3 en cada punto de la curva (se dice que es un sistema de referencia móvil).

Tomando dos a dos los vectores anteriores, a cada punto de α le corresponden tres planos afines distintos, con sus espacios de direcciones asociados.

Definición 1.0.4. Sea $s_0 \in (a, b)$. Se definen los siguientes planos afines:

1. a) **Plano osculador afín de α en s_0** $\equiv \alpha(s_0) + \langle \mathbf{t}(s_0), \mathbf{n}(s_0) \rangle$
- b) **Plano normal afín de α en s_0** $\equiv \alpha(s_0) + \langle \mathbf{n}(s_0), \mathbf{b}(s_0) \rangle$
- c) **Plano rectificante afín de α en s_0** $\equiv \alpha(s_0) + \langle \mathbf{t}(s_0), \mathbf{b}(s_0) \rangle$

Consecuentemente, definimos sus espacios de direcciones como:

³Sin embargo, en la práctica suele resultar imposible obtener la parametrización al requerir para ello una forma explícita de la función g^{-1} .

⁴A este campo vectorial también se le conoce como **indicatriz esférica de la tangente**, ya que define una curva contenida en la esfera unidad.

⁵La definición de \mathbf{n} sólo tiene sentido si $\alpha'' \neq 0$. Si este campo se anula sólo en puntos aislados, las demás construcciones del texto tendrán sentido únicamente entre tales puntos.

2. a) **Plano osculador vectorial de α en $s_0 \equiv \langle \mathbf{t}(s_0), \mathbf{n}(s_0) \rangle$**
- b) **Plano normal vectorial de α en $s_0 \equiv \langle \mathbf{n}(s_0), \mathbf{b}(s_0) \rangle$**
- c) **Plano rectificante vectorial de α en $s_0 \equiv \langle \mathbf{t}(s_0), \mathbf{b}(s_0) \rangle$.**

Veamos ahora un resultado que nos será de utilidad en el capítulo siguiente:

Proposición 1.0.5. Sea V un espacio vectorial de dimensión r sobre un cuerpo K . Entonces, $v \in V$ si y solo si 0 es un punto de la variedad afín $v + V$.

Demostración. Si $v \in V$ y w_i forman una base de V , existen coeficientes $\lambda_i \in K$ tales que $v = \sum_{i=1}^r \lambda_i w_i$. Tomando $\mu_i = -\lambda_i$ en la ecuación anterior, se tiene que $\sum_{i=1}^r \mu_i w_i + v = 0$, luego 0 pertenece a la variedad afín. Para el recíproco no hay más que empezar por el final deshaciendo los pasos de la demostración. \square

En lo que nos concierne, $K = \mathbb{R}$ y V será un subespacio vectorial de dimensión 2 de \mathbb{R}^3 , es decir, un plano vectorial. Usaremos la proposición cuando veamos la definición de **curva rectificante** que da Chen en [1] para interpretar más claramente qué son las curvas rectificantes.

1.1. Ecuaciones de Frenet-Serret. Vector de Darboux.

Volviendo ahora al triedro ortonormal $\{\mathbf{t}(s), \mathbf{n}(s), \mathbf{b}(s)\}$ asociado a la c.r.p.n α y procediendo como hicimos con \mathbf{t} , vamos a obtener unas importantes ecuaciones.

Si tenemos en cuenta que $\mathbf{b}(s) \cdot \mathbf{b}(s) = 1$ y derivamos, llegamos a $2(\mathbf{b}(s) \cdot \mathbf{b}'(s)) = 0$. Por tanto $\mathbf{b}'(s)$ es perpendicular a $\mathbf{b}(s)$. Además, como $\mathbf{b}(s) \cdot \mathbf{t}(s) = 0$, derivando $\mathbf{b}'(s) \cdot \mathbf{t}(s) + \mathbf{b}(s) \cdot \mathbf{t}'(s) = 0$. Usando la ecuación $\mathbf{t}'(s) = k(s)\mathbf{n}(s)$ y que $\mathbf{b}(s)$ y $\mathbf{n}(s)$ son perpendiculares, nos queda $\mathbf{b}'(s) \cdot \mathbf{t}(s) = 0$. Hemos obtenido que $\mathbf{b}'(s)$ es perpendicular a $\mathbf{b}(s)$ y a $\mathbf{t}(s)$, luego necesariamente debe tener la misma dirección que $\mathbf{n}(s)$, es decir, debe existir una función $\tau(s)$ satisfaciendo la ecuación $\mathbf{b}'(s) = -\tau(s)\mathbf{n}(s)$. A esta función se la denomina **torsión** de α , y se puede demostrar que

$$\tau(s) = \frac{(\alpha'(s), \alpha''(s), \alpha'''(s))}{k_\alpha^2},$$

Obtendremos ahora una tercera ecuación a partir de $\mathbf{n}(s)$. Partiendo de que $\mathbf{n}(s) = \mathbf{b} \times \mathbf{t}(s)$, derivando se sigue $\mathbf{n}'(s) = \mathbf{b}'(s) \times \mathbf{t}(s) + \mathbf{b}(s) \times \mathbf{t}'(s)$. Usando las ecuaciones anteriores,

$$\mathbf{n}'(s) = (-\tau(s)\mathbf{n}(s)) \times \mathbf{t}(s) + \mathbf{b}(s) \times (k(s)\mathbf{n}(s)) = -\tau(s)(-\mathbf{b}(s)) + k(s)(-\mathbf{t}(s)) =$$

$$= -k(s)\mathbf{t}(s) + \tau\mathbf{b}(s).$$

A estas tres ecuaciones en conjunto se les denomina **ecuaciones de Frenet-Serret** y se usarán con frecuencia en este texto.

$$\begin{cases} \mathbf{t}'(s) = k(s)\mathbf{n}(s) \\ \mathbf{n}'(s) = -k(s)\mathbf{t}(s) + \tau(s)\mathbf{b}(s) \\ \mathbf{b}'(s) = -\tau(s)\mathbf{n}(s) \end{cases} \quad (1.2)$$

A partir de ellas, se puede probar un teorema de central en la geometría local de curvas.

Teorema 1.1.1. (Teorema Fundamental de Curvas Alabeadas)

Sean $\lambda, \mu : (a, b) \rightarrow \mathbb{R} : s \mapsto \lambda(s), \mu(s)$ cumpliendo $\lambda(s) \geq 0, \lambda \in C^1, \mu \in C^0$. Entonces, existe una c.r.p.n. $\alpha = \alpha(s)$ tal que su curvatura es $\lambda(s)$ su torsión $\mu(s)$. Además, α es única salvo movimientos rígidos.

Vamos ahora a hacer una importante consideración. Si un objeto rígido se está moviendo a lo largo de una curva $\alpha(s)$, entre un instante s_0 y otro s_1 podemos describir el movimiento del objeto a través de un vector de traslación y otro vector de rotación. Este último se estudia en mecánica clásica tomando s_1 infinitesimalmente próximo a s_0 y dividiéndolo escalarmente por $s_1 - s_0$ y se denomina **vector momento angular** en s_0 . El vector momento angular resulta ser directamente proporcional con factor $2m$ (siendo m la masa del objeto) al vector **velocidad areolar**, definiéndose la velocidad areolar de un campo de vectores diferenciable⁶ $\mathbf{r}(s)$ como el campo de vectores dado por

$$\boldsymbol{\omega}(s) = \frac{\mathbf{r}(s) \times \mathbf{r}'(s)}{2}.$$

Definición 1.1.2. Se define el **vector de Darboux** asociado a una curva α en $s = s_0$ como la suma de las velocidades areolares de los vectores del triedro de Frenet $\{\mathbf{t}(s), \mathbf{n}(s), \mathbf{b}(s)\}$ en $s = s_0$.

El vector de Darboux vendrá por tanto dado por $\mathbf{d}(s) = \boldsymbol{\omega}_{\mathbf{t}}(s) + \boldsymbol{\omega}_{\mathbf{n}}(s) + \boldsymbol{\omega}_{\mathbf{b}}(s)$. Calculemoslo explícitamente haciendo uso de las ecuaciones de Frenet-Serret:⁷

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\omega}_{\mathbf{t}} &= \frac{\mathbf{t} \times \mathbf{t}'}{2} = \frac{k\mathbf{t} \times \mathbf{n}}{2} = \frac{1}{2}k\mathbf{b} \\ \boldsymbol{\omega}_{\mathbf{n}} &= \frac{\mathbf{n} \times \mathbf{n}'}{2} = \frac{-k\mathbf{n} \times \mathbf{t} + \tau\mathbf{n} \times \mathbf{b}}{2} = \frac{1}{2}(k\mathbf{b} + \tau\mathbf{t}) \end{aligned}$$

⁶Para esta definición debemos interpretar a la curva α como el campo de vectores que a cada valor de $s \in (a, b)$ le asigna el vector $\alpha(s)$.

⁷A partir de ahora se obvia la variable s cuando no sea necesaria para simplificar la notación.

$$\omega_{\mathbf{b}} = \frac{\mathbf{b} \times \mathbf{b}'}{2} = -\frac{\tau \mathbf{b} \times \mathbf{n}}{2} = \frac{1}{2} \tau \mathbf{t}$$

Entonces, $\mathbf{d} = \frac{1}{2}[k\mathbf{b} + (k\mathbf{b} + \tau\mathbf{t}) + \tau\mathbf{t}]$. Hemos llegado a que

$$\mathbf{d} = \tau\mathbf{t} + k\mathbf{b}. \quad (1.3)$$

Además, el vector de Darboux cumple una interesante propiedad que vemos a continuación.

Proposición 1.1.3. El vector de Darboux \mathbf{d} verifica las igualdades:

$$\mathbf{d} \times \mathbf{t} = \mathbf{t}',$$

$$\mathbf{d} \times \mathbf{n} = \mathbf{n}',$$

$$\mathbf{d} \times \mathbf{b} = \mathbf{b}'.$$

Demostración. Usando las ecuaciones de Frenet-Serret y teniendo en cuenta que $\mathbf{d} = \tau\mathbf{t} + k\mathbf{b}$,

$$(\tau\mathbf{t} + k\mathbf{b}) \times \mathbf{t} = \mathbf{0} + k\mathbf{n} = \mathbf{t}',$$

$$(\tau\mathbf{t} + k\mathbf{b}) \times \mathbf{n} = \tau\mathbf{b} - k\mathbf{t} = \mathbf{n}',$$

$$(\tau\mathbf{t} + k\mathbf{b}) \times \mathbf{b} = -\tau\mathbf{n} + \mathbf{0} = \mathbf{b}'.$$

□

Presentamos ahora algunos resultados sin demostración que nos harán falta para el capítulo siguiente.

Proposición 1.1.4. Una curva es plana si y solo si su torsión es idénticamente nula. En este caso la curva se podrá expresar en función de \mathbf{t} y \mathbf{n} .

Proposición 1.1.5. Sea α una curva cuya imagen está contenida en una superficie simple de una superficie regular. Entonces $\{\mathbf{t}, \mathbf{S}, \mathbf{N}\}$ forma un sistema de referencia móvil de \mathbb{R}^3 , donde \mathbf{N} es el campo vectorial normal a la superficie y $\mathbf{S} = \mathbf{N} \times \mathbf{t}$.⁸

Si α es una c.r.p.n, entonces $\alpha' = \mathbf{t}$ y $\alpha'' = \mathbf{t}' = k\mathbf{n}$, con lo que $\alpha'' \perp \mathbf{t}$. Por tanto, si además α está contenida en una superficie, al ser $\{\mathbf{t}, \mathbf{S}, \mathbf{N}\}$ un sistema ortonormal deben existir dos funciones $k_g(s)$ y $k_n(s)$ tales que

$$\alpha''(s) = k(s)\mathbf{n}(s) = k_g(s)\mathbf{S}(s) + k_n(s)\mathbf{N}(s). \quad (1.4)$$

Estos dos coeficientes se llamarán, respectivamente, **curvatura geodésica** y **curvatura normal**.

⁸Si bien \mathbf{N} está definido en toda la superficie simple, el sistema ortonormal solo tiene sentido en los puntos $\alpha(s)$.

Capítulo 2

Curvas Rectificantes

2.1. Primeros pasos.

Es habitual en Geometría Diferencial preguntarse qué curva resuelve un problema dado (ejemplos históricos son el de la curva braquistócrona, la curva tautócrona o la catenaria, por ejemplo). Esto precisamente es lo que haremos a continuación. El problema surge de forma natural a partir de las definiciones del capítulo previo: ¿Qué tipo de curvas tendrán su vector posición contenido en todo momento en su plano osculador vectorial? ¿Qué curvas lo tendrán contenido en el normal? ¿Y cuáles en el rectificante?

La respuesta a las dos primeras preguntas se halla sin demasiada dificultad. Veámoslo en las dos proposiciones siguientes e ilustremoslo con ejemplos:

Proposición 2.1.1. Sea $\alpha : (a, b) \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3$ una c.r.p.n., entonces el vector posición $\alpha(s)$ está contenido en su plano osculador vectorial asociado si y solo α es plana.

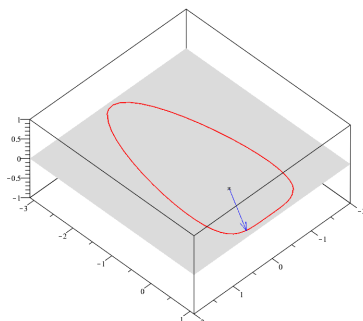


Figura 2.1: Se representa la curva plana $\alpha(t) = (\cos(t), 1 - (1 - \sin(t))^2, 0)$.

Demostración. Sea α una curva tal que $\alpha(s) \in \langle \mathbf{t}(s), \mathbf{n}(s) \rangle$ para todo s . Esto equivale a que $\alpha \cdot \mathbf{b} = 0$. Derivando y usando la tercera ecuación de Frenet-Serret, $\mathbf{t} \cdot \mathbf{b} - \alpha \cdot \tau \mathbf{n} = 0$. Como los vectores \mathbf{t} y \mathbf{b} son ortogonales, queda $\alpha \cdot \tau \mathbf{n} = 0$ para todo s . Si $\tau \neq 0$, entonces $\alpha \cdot \mathbf{n} = 0$, por lo que derivando se tiene que $\alpha \cdot (-k\mathbf{t} + \tau\mathbf{b})$. Como $\alpha \cdot \mathbf{b} = 0$, entonces $\alpha \cdot \mathbf{t} = 0$ y se tendría $\alpha \equiv 0$, lo que es absurdo. Luego necesariamente $\tau \equiv 0$ y por tanto α es plana. El recíproco es trivial. \square

Proposición 2.1.2. Sea $\alpha : (a, b) \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ una c.r.p.n., entonces el vector $\alpha(s)$ está contenido en su plano normal vectorial asociado si y solo si está α contenida en una esfera.

Demostración. Si $\alpha \subset S^2(R)$, entonces $|\alpha(s)|^2 = R^2$ para todo s , esto es, $\alpha(s) \cdot \alpha(s) = R^2$ y derivando $2\mathbf{t}(s) \cdot \alpha(s) = 0$, luego $\alpha(s) \in \langle \mathbf{n}(s), \mathbf{b}(s) \rangle$, que es la definición de plano normal vectorial de α en s .

Recíprocamente, si suponemos que $\alpha(s) = \lambda(s)\mathbf{n}(s) + \mu(s)\mathbf{b}(s)$, el producto escalar $\alpha(s) \cdot \alpha(s) = \lambda^2(s) + \mu^2(s)$. Como $\mathbf{t} \perp \alpha$, sabemos que la derivada de la expresión anterior vale 0. Por tanto, la expresión anterior debe tener un valor constante y positivo (el producto escalar es siempre positivo). Expresemos dicha constante como R^2 . Hemos llegado entonces a que para todo s , $|\alpha(s)|^2 = R^2$, luego la curva α está contenida en la esfera de radio R . \square

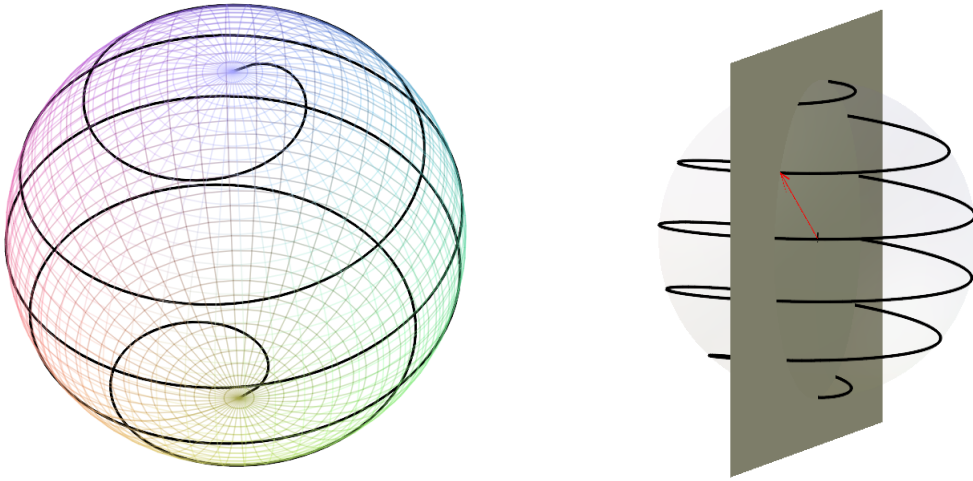


Figura 2.2: Se representa la curva $\beta(t) = (\sqrt{1-t^2}\cos(5\pi t), \sqrt{1-t^2}\sin(5\pi t), t)$ contenida en la esfera unitaria. A la derecha, se encuentran en rojo el vector posición de β en $t = 1/2$ y en gris el plano normal que lo contiene. Podemos hablar indistintamente del plano normal afín y del vectorial, pues al contener el afín al vector posición de β en todo momento, que es lo que se ha probado en la Proposición 2.1.2, ambos contienen al origen y por tanto coinciden para cada valor de t .

Sin embargo, el caso para el plano rectificante vectorial era desconocido en la literatura clásica y resulta más complicado de abordar e interpretar. Bang-Yen Chen encuentra la solución de este problema en [1], que de hecho se titula "*When Does the Position Vector of a Space Curve Always Lie in Its Rectifying Plane?*", traducido literalmente como "¿Cuándo está el vector posición de una curva espacial contenido en su plano rectificante?"¹. A las curvas que cumplen esta propiedad en todo punto Chen las denominó *curvas rectificantes* y, de ahora en adelante, nos centraremos en su estudio.

Observación 2.1.3. *En virtud de la Proposición 1.0.5, una curva rectificante α es una curva tal que el vector nulo está contenido en el plano rectificante afín asociado a $\alpha(s)$ para todo s .*

Observación 2.1.4. *Por definición, una **curva rectificante** es una curva regular $\alpha : (a, b) \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que su vector posición $\alpha(s) \in \langle \mathbf{t}(s), \mathbf{b}(s) \rangle$ para todo s , así que toda curva rectificante es de la forma*

$$\alpha(s) = \lambda(s)\mathbf{t}(s) + \mu(s)\mathbf{b}(s). \quad (2.1)$$

Damos a continuación un primer teorema que nos ayuda a caracterizar las curvas rectificantes:

Teorema 2.1.5. *Sea $\alpha : (a, b) \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ una c.r.p.n con curvatura $k > 0$. Entonces son equivalentes:*

- (i). *La curva α es rectificante.*
- (ii). *La componente tangencial del vector posición de la curva viene dada por $\alpha \cdot \mathbf{t} = s + b$ para alguna constante b .*
- (iii). *La función $\rho = |\alpha|$ satisface $\rho^2 = s^2 + c_1 s + c_2$ para ciertas constantes c_1 y c_2 .*
- (iv). *La función ρ no es constante mientras que el vector $\alpha_N(s) = \alpha(s) - (\alpha(s) \cdot \mathbf{t}(s))\mathbf{t}(s)$ tiene longitud constante para todo s .*
- (v). *La componente binormal del vector posición de la curva, $\alpha \cdot \mathbf{b}$, es constante y la torsión τ no es nula.*

Demostración. El esquema de la prueba es el siguiente: primero se demuestra que (i) implica cualquiera de los demás enunciados y después que cualquiera de éstos implica (i).

Comencemos pues asumiendo (i). Entonces $\alpha(s) = \lambda(s)\mathbf{t}(s) + \mu(s)\mathbf{b}(s)$. Como viene siendo habitual, derivamos y usamos las ecuaciones de Frenet-Serret para obtener que $\mathbf{t} = \lambda'\mathbf{t} + \lambda\mathbf{t}' + \mu'\mathbf{b} + \mu\mathbf{b}' = \lambda'\mathbf{t} + (\lambda k - \mu\tau)\mathbf{n} + \mu'\mathbf{b}$. Se tienen así las igualdades

$$\lambda' = 1, \quad \lambda k = \mu\tau, \quad \mu' = 0. \quad (2.2)$$

¹Conviene aclarar que con *plano rectificante* Chen se refiere a lo que nosotros hemos definido como plano rectificante vectorial.

De la primera llegamos a que $\lambda(s) = s + b$ para una cierta constante b , por lo que ya tenemos (ii). Además, como $\rho^2 = \alpha \cdot \alpha$, su derivada $(\rho^2)' = (\alpha \cdot \alpha)' = 2(\alpha \cdot \mathbf{t}) = 2(s + b)$. Considerando $c_1 = b/2$, si integramos $(\rho^2)'$ vemos que (ii) y (iii) son equivalentes y tenemos (iii).

Con esto ya sabemos que ρ no es constante y, por la tercera igualdad de (2.2), que μ es constante. Al ser $\alpha_N(s) = \mu \mathbf{b}(s)$ (ya que la componente normal de α es nula) llegamos a (iv).

Ya hemos visto que la componente binormal μ es constante. Además, podemos asumir que $\mu = 0$.² Por la segunda igualdad de (2.2) se verifica $\tau(s) = (s + b)k(s)/\mu$, así que se tiene (v).

Veamos que partiendo de cualquiera de los otros puntos se tiene que la curva α es rectificante:

Supongamos que se tiene (ii). Derivando $\alpha \cdot \mathbf{t} = s + b$, obtenemos $\mathbf{t} \cdot \mathbf{t} + k(\alpha \cdot \mathbf{n}) = 1$. Al ser $|\mathbf{t}| = 1$, la igualdad queda como $k(\alpha \cdot \mathbf{n}) = 0$. Dado que asumimos que $k(s) > 0$, esto implica que $\alpha \cdot \mathbf{n} = 0$, que es lo mismo que decir que la curva es rectificante. Asimismo, al ser (ii) equivalente a (iii), también hemos probado que una curva en las condiciones de (iii) es rectificante.

Si partimos de (iv), sabemos que la curva puede escribirse como $\alpha = (\alpha \cdot \mathbf{t})\mathbf{t} + \alpha_N$, cumpliéndose que $|\alpha_N(s)| = C$ para todo s por tener longitud constante en todo momento. En consecuencia, teniendo en cuenta que $\mathbf{t} \perp \alpha_N$, se cumple

$$\alpha \cdot \alpha = (\alpha \cdot \mathbf{t})^2 + 2(\alpha \cdot \mathbf{t})(\alpha \cdot \alpha_N) + C^2 = (\alpha \cdot \mathbf{t})^2 + C^2. \quad (2.3)$$

Derivando la última expresión, queda $2(\alpha \cdot \mathbf{t})' = 2(\alpha \cdot \mathbf{t})[(\mathbf{t} \cdot \mathbf{t}) + (\alpha \cdot k\mathbf{n})]$, por lo que simplificando se obtiene

$$\alpha \cdot \mathbf{t} = (\alpha \cdot \mathbf{t})(1 + k(\alpha \cdot \mathbf{n})). \quad (2.4)$$

Como hemos asumido que la función ρ no es constante y $\rho^2 = \alpha \cdot \alpha$, (2.3) implica $\alpha \cdot \mathbf{t} \neq 0$. Al ser $k > 0$, se tiene como en el apartado anterior que $\alpha \cdot \mathbf{n} = 0$, luego a curva es rectificante.

Por último, si partimos de (v), tenemos que $\alpha(s) \cdot \mathbf{b}(s) = cte$ para todo s . Derivando, queda $\mathbf{t} \cdot \mathbf{b} + \alpha \cdot \mathbf{b}' = 0$. Como $\mathbf{t} \perp \mathbf{b}$, por la tercera ecuación de Frenet Serret queda $-\tau(\alpha \cdot \mathbf{n}) = 0$. Como $\tau \neq 0$ por (iv), queda $\alpha \cdot \mathbf{n} = 0$ y la curva es rectificante.

□

²Las curvas rectificantes con $\mu = 0$ quedan perfectamente clasificadas, quedando sin interés el teorema en este caso. En efecto, en este caso se tendría que la curva α verificaría la ecuación diferencial $\alpha(s) = \lambda(s)\alpha'(s)$. Por tanto, componente a componente queda la misma ecuación diferencial $\alpha_i(s) = \lambda(s)\alpha'_i(s)$, que es separable y fácil de resolver. Así, $\alpha(s) = (c_1, c_2, c_3)\exp(\int_a^s d\sigma/\lambda(\sigma))$ para ciertas constantes c_1, c_2 y c_3 .

Corolario 2.1.6. *El vector posición de una curva rectificante parametrizada naturalmente $\alpha = \lambda \mathbf{t} + \mu \mathbf{b}$ tiene en todo momento la misma dirección que el vector de Darboux $\mathbf{d} = \tau \mathbf{t} + k \mathbf{b}$ de la curva.*

Demostración. Sabemos que en una curva rectificante parametrizada naturalmente se verifica la segunda igualdad de (2.2), esto es, $\lambda k = \mu \tau$. Despejando, $\tau = (\lambda/\mu)k$. Por tanto, en una curva rectificante el vector de Darboux es $\mathbf{d} = (\lambda/\mu)k \mathbf{t} + k \mathbf{b} = (k/\mu)(\lambda \mathbf{t} + \mu \mathbf{b}) = (k/\mu)\alpha$. \square

También como consecuencia del Teorema 2.1.5 puede obtenerse un resultado importante. Antes necesitamos otra definición.

Definición 2.1.7. *Se dice que dos curvas α y β son **congruentes** si existe un vector \mathbf{v} tal que $\alpha(s) = \mathbf{v} + \beta(s)$ para todo s . Es decir, dos curvas son congruentes si y solo si son la misma salvo traslación.*

Teorema 2.1.8. *Sea $\alpha : (a, b) \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3$ una c.r.p.n con curvatura $k > 0$. Entonces α es congruente a una curva rectificante si y solo si $\tau/k = (s + b)/a$ para algunas constantes a y b , con $a \neq 0$ y siendo s el parámetro longitud de arco.*

Demostración. Si α es congruente a una curva rectificante, $\alpha = \mathbf{v} + \beta$, donde β es una curva rectificante y \mathbf{v} un vector constante. Se sigue verificando (2.2) porque \mathbf{v} desaparece al derivar. Por la segunda de estas igualdades, sabemos que $\tau/k = \lambda/\mu = (s + b)/a$, luego ya está.

Veamos ahora la implicación recíproca. Sea α una curva con $\tau/k = (s + b)/a$. Vamos a probar que α es congruente a la curva $(s + b)\mathbf{t}(s) + a\mathbf{b}(s)$, que obviamente es rectificante. Para ello tenemos que ver que $\alpha(s) - (s + b)\mathbf{t}(s) - a\mathbf{b}(s) = \mathbf{w}$, o lo que es lo mismo, que $[\alpha(s) - (s + b)\mathbf{t}(s) - a\mathbf{b}(s)]' = \mathbf{0}$.

$$\begin{aligned} [\alpha(s) - (s + b)\mathbf{t}(s) - a\mathbf{b}(s)]' &= \mathbf{t}(s) - \mathbf{t}(s) - (s + b)k(s)\mathbf{n}(s) + a\tau(s)\mathbf{n}(s) = \\ &= [a\tau(s) - (s + b)k(s)]\mathbf{n}(s) = \mathbf{0}, \end{aligned}$$

porque hemos supuesto $\tau/k = (s + b)/a$. \square

Observación 2.1.9. *Por la Observación 2.1.3, una curva $\alpha(s)$ es congruente a una curva rectificante mediante un vector \mathbf{v} si y solo si \mathbf{v} está contenido en el plano rectificante afín de $\alpha(s)$ para todo s . Teniendo eso en cuenta, el Teorema B de [7] proporciona una prueba alternativa del Teorema 2.1.8.*

2.2. Caracterización de Curvas Rectificantes.

Damos a en esta sección un teorema que caracteriza a las curvas rectificantes. Este será el resultado más importante del texto, pues nos permitirá encontrar ejemplos de las mismas.

Teorema 2.2.1. Caracterización de las curvas rectificantes.

Sea $\alpha : (a, b) \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3$ una curva con curvatura $k > 0$. Entonces, α es una curva rectificante si y solo si viene dada (salvo reparametrización) por

$$\alpha(t) = a \sec(t) \mathbf{y}(t), \quad (2.5)$$

donde a es constante, $a \neq 0$, e $\mathbf{y}(t)$ es una c.r.p.n. contenida en la esfera unidad S^2 .

Demostración. Supongamos que α viene dada por $\alpha(t) = a \sec(t) \mathbf{y}(t)$. Tenemos entonces

$$\alpha'(t) = a \sec(t) [\tan(t) \mathbf{y}(t) + \mathbf{y}'(t)]. \quad (2.6)$$

pues $\sec(x) = \frac{1}{\cos(x)}$ y por tanto $\frac{d}{dx} \sec(x) = \frac{\sec(x)}{\cos^2(x)} = \sec(x) \tan(x)$.

Al ser \mathbf{y} una c.r.p.n. contenida en S^2 , está claro que $\mathbf{y}(t)$ es ortonormal a $\mathbf{y}'(t)$ para cada t . Así pues, por (2.6) se tiene

$$|\alpha'(t)| = \sqrt{a^2 \sec^2(t) [\tan^2(t) + 1]} = \sqrt{a^2 \sec^4(t)} = a \sec^2(t). \quad (2.7)$$

Llamando $\rho(t) = |\alpha(t)|$ y recordando que $\tan^2(x) = \sec^2(x) - 1$, de los resultados anteriores puede deducirse³

$$\begin{aligned} \alpha_N \cdot \alpha_N &= \rho^2(t) - \frac{(\alpha(t) \cdot \alpha'(t))^2}{|\alpha'(t)|^2} = a^2 \sec^2(t) - \frac{a^4 \sec^4(t) \tan^2(t)}{a^2 \sec^4(t)} = \\ &= a^2 [\sec^2(t) - \tan^2(t)] = a^2, \end{aligned}$$

lo que significa que el vector α_N **tiene longitud constante** en todo momento. Por el Teorema 2.1.5 esto último implica que la curva es rectificante.

Falta ver el recíproco. Sea $\alpha : (a, b) \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3$ una curva rectificante con curvatura $k > 0$. Sin pérdida de generalidad, supondremos que α está parametrizada naturalmente y que $0 \in (a, b)$. Por el Teorema 2.1.5, la función $\rho(s) = |\alpha(s)|$ satisface $\rho^2(s) = s^2 + c_1 s + c_2$. Como hemos supuesto que $0 \in (a, b)$, necesariamente $c_2 \geq 0$. Reparametrizando la función con $s = r + r_0$,

³Es conveniente tener en cuenta que en la primera igualdad no aparecen más terminos porque la base de Frenet es ortogonal y el vector tangente de α viene dado por $\alpha'(t)/|\alpha'|$

$$\begin{aligned}\rho^2(s) &= s^2 + c_1s + c_2 = r^2 + 2rr_0 + r_0^2 + c_1s + c_2 = \\ &= r^2 + 2sr_0 - 2r_0^2 + r_0^2 + c_1s + c_2 = r^2 + (2r_0 + c_1)r + (r_0^2 + c_2),\end{aligned}$$

luego tomando $c = r_0^2 + c_2 = a^2$ y $r_0 = -\frac{c_1}{2}$, escribimos

$$\rho^2(r) = r^2 + a^2. \quad (2.8)$$

Ahora definimos la curva $\mathbf{y} = \alpha/\rho$, que por construcción está contenida en S^2 . Por tanto, tenemos α está dada por

$$\alpha(r) = \sqrt{r^2 + a^2} \mathbf{y}(r). \quad (2.9)$$

Derivando, llegamos a

$$\alpha'(r) = \frac{r}{\sqrt{r^2 + a^2}} \mathbf{y}(r) + \sqrt{r^2 + a^2} \mathbf{y}'(r). \quad (2.10)$$

Por estar \mathbf{y} contenida en S^2 , se tiene $\mathbf{y} \cdot \mathbf{y} = 1$, luego al derivar el producto escalar obtenemos que $\mathbf{y}'(r)$ es perpendicular a $\mathbf{y}(r)$ para todo r . Por otro lado, $\alpha'(r) \cdot \alpha'(r) = 1$ ya que r es un parámetro natural de α . Además, al ser $\rho^2(r) = \alpha(r) \cdot \alpha(r) = r^2 + a^2$, derivando llegamos a que $\alpha(r) \cdot \alpha'(r) = r$. Como

$$\mathbf{y}'(r) = \frac{\alpha'(r)\sqrt{r^2 + a^2} - \alpha(r)\frac{r}{\sqrt{r^2 + a^2}}}{r^2 + a^2}, \quad (2.11)$$

por los resultados del párrafo anterior llegamos a que

$$v^2 = \mathbf{y}'(r) \cdot \mathbf{y}'(r) = \frac{1}{(r^2 + a^2)^2} \left[r^2 + a^2 + \frac{(r^2 + a^2)r^2}{r^2 + a^2} - 2r^2 \right] = \frac{a^2}{(r^2 + a^2)^2}. \quad (2.12)$$

Tenemos que $v = a/(r^2 + a^2)$. Sea ahora

$$t = \int_0^r \frac{adu}{u^2 + a^2} = \arctg\left(\frac{r}{a}\right). \quad (2.13)$$

Tenemos $r = a \tan(t)$. Por construcción, t es el parámetro natural de \mathbf{y} . Sustituyendo la expresión anterior en (2.9)⁴, llegamos a la expresión (2.5) sin más que tener en cuenta que

$$\sqrt{r^2 + a^2} = \sqrt{a^2 \tan^2(t) + a^2} = \sqrt{a^2(\tan^2(t) + 1)} = \sqrt{a^2 \sec^2(t)} = a \sec(t).$$

□

⁴Aquí denotamos la curva $\mathbf{y}(r) = \mathbf{y}(a \tan(t))$ directamente como $\mathbf{y}(t)$.

Dada la importancia del teorema, a continuación se presenta otra prueba del mismo, esta vez enunciado tal y como aparece en [3]. En esta prueba alternativa se usan la curvatura normal y geodésica de la curva $\mathbf{y}(t)$ en S^2 para llegar a una ecuación diferencial que será necesario resolver para obtener la fórmula que caracteriza a las curvas rectificantes.

Teorema 2.2.2. Caracterización de las curvas rectificantes

Sea $\alpha : (a, b) \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3$ una curva con curvatura $k > 0$. Entonces, α es una curva rectificante si y solo si viene dada por

$$\alpha(t) = a \sec(t + t_0) \mathbf{y}(t), \quad (2.14)$$

donde a y t_0 son constantes, $a \neq 0$, e $\mathbf{y}(t)$ es una c.r.p.n. contenida en la esfera unidad S^2 .

Demostración. Sea una c.r.p.n. $\mathbf{y} = \mathbf{y}(t)$ en S^2 y una función positiva ρ . Definimos la curva $\alpha = \rho \mathbf{y}$. Se va a probar que α es una curva rectificante si y solo si $\rho(t) = a \sec(t + t_0)$ para ciertas constantes a y t_0 con $a \neq 0$.

Tenemos que $\alpha' = \rho' \mathbf{y} + \rho \mathbf{y}'$, lo que implica que el campo de vectores tangentes unitarios asociado a α viene dado por

$$\mathbf{t} = \frac{\rho'}{v} \mathbf{y} + \frac{\rho}{v} \mathbf{y}', \quad v = \sqrt{\rho^2 + \rho'^2}.$$

Aplicando la regla de la cadena y la primera ecuación de Frenet-Serret, sabemos si s es el parámetro natural de α que

$$\mathbf{t}' = \frac{d\mathbf{t}}{dt} = \frac{d\mathbf{t}}{ds} \frac{ds}{dt} = k(t) \mathbf{n}(t) \frac{ds}{dt} = k(t) \mathbf{n}(t) |\alpha'(t)|. \quad (2.15)$$

Así, el campo vectorial normal de α es paralelo a

$$\mathbf{t}' = \left(\frac{\rho'}{v} \right)' \mathbf{y} + \left(\frac{2\rho'}{v} - \rho \frac{\rho\rho' + \rho'\rho''}{v^3} \right) \mathbf{y}' + \frac{\rho}{v} \mathbf{y}''. \quad (2.16)$$

Por otro lado, como $\mathbf{y} \in S^2$, tenemos por el resultado (1.4) que $\mathbf{y}'' = k_n \mathbf{N} + k_g \mathbf{S}$. Como $\mathbf{N}(t)$ es el vector perpendicular al punto de la superficie en la que se encuentra \mathbf{y} en el instante t , se tiene que $\mathbf{N} = \mathbf{y}$ porque la superficie con la que estamos trabajando es la esfera unidad. Por la misma razón $\mathbf{y} \cdot \mathbf{y} = 1$ y si derivamos dos veces obtenemos que $\mathbf{y}'' \cdot \mathbf{y} = -\mathbf{y}' \cdot \mathbf{y}' = -1$ por ser \mathbf{y} una c.r.p.n.. Como $k_n = \mathbf{y}'' \cdot \mathbf{N} = \mathbf{y}'' \cdot \mathbf{y}$, $k_n = -1$. Tenemos además por ser $\mathbf{N} = \mathbf{y}$ que $\mathbf{S} = \mathbf{y} \times \mathbf{y}'$, con lo que el resultado (1.4) en nuestro caso se escribe

$$\mathbf{y}'' = -\mathbf{y} + k_g(\mathbf{y} \times \mathbf{y}'). \quad (2.17)$$

Sustituyendo (2.15) y (2.17) en (2.16) y recordando que $\alpha/\rho = \mathbf{y}$:

$$k|\alpha'|\mathbf{n} = \left(\left(\frac{\rho'}{v} \right)' - \frac{\rho}{v} \right) \mathbf{y} + \left(\frac{2\rho'}{v} - \rho \frac{\rho\rho' + \rho'\rho''}{v^3} \right) \mathbf{y}' + \frac{k_g}{v} (\alpha \times \mathbf{y}'). \quad (2.18)$$

Por estar $\mathbf{y} \in S^2$, se tiene $\mathbf{y} \cdot \mathbf{y}' = 0$. Como $\alpha = \rho\mathbf{y}$, $\alpha \cdot \mathbf{y}' = 0$. Está claro también que $\alpha \cdot (\alpha \times \mathbf{y}') = 0$. Así pues, multiplicando escalarmente (2.18) por α queda

$$k|\alpha'|(\mathbf{n} \cdot \alpha) = \left(\left(\frac{\rho'}{v} \right)' - \frac{\rho}{v} \right) (\mathbf{y} \cdot \alpha). \quad (2.19)$$

Sabemos que α será rectificante si y solo si $\mathbf{n} \cdot \alpha = 0$. En consecuencia, tenemos que α será una curva rectificante si y solo si la función ρ verifica la ecuación diferencial

$$\left(\frac{\rho'}{v} \right)' = \frac{\rho}{v}. \quad (2.20)$$

Teniendo en cuenta que $v' = \frac{\rho'(\rho'' + \rho)}{\sqrt{\rho^2 + \rho'^2}}$, está claro que

$$\begin{aligned} \left(\frac{\rho'}{v} \right)' &= \frac{\rho''v - \rho v'}{v^2} = \frac{\rho''\sqrt{\rho^2 + \rho'^2} - \frac{\rho'^2(\rho'' + \rho)}{\sqrt{\rho^2 + \rho'^2}}}{\rho^2 + \rho'^2} = \frac{\rho''}{\sqrt{\rho^2 + \rho'^2}} - \frac{\rho'^2(\rho'' + \rho)}{(\rho^2 + \rho'^2)^{3/2}} = \\ &= \frac{\rho''\rho^2 + \rho''\rho'^2 - \rho'^2\rho'' - \rho'^2\rho}{(\rho^2 + \rho'^2)^{3/2}} = \frac{\rho''\rho^2 - \rho'^2\rho}{(\rho^2 + \rho'^2)^{3/2}}, \end{aligned}$$

luego la ecuación diferencial quedaría como

$$\frac{\rho''\rho^2 - \rho'^2\rho}{(\rho^2 + \rho'^2)^{3/2}} = \frac{\rho}{\sqrt{\rho^2 + \rho'^2}}.$$

Vamos a tratar de simplificar la ecuación. Multiplicando el lado derecho de la igualdad por $\frac{\rho^2 + \rho'^2}{\rho^2 + \rho'^2}$, obtenemos

$$\frac{\rho''\rho^2 - \rho'^2\rho}{(\rho^2 + \rho'^2)^{3/2}} = \frac{\rho(\rho^2 + \rho'^2)}{(\rho^2 + \rho'^2)^{3/2}}.$$

Cancelando los denominadores y multiplicando la igualdad por $1/\rho$, obtenemos la ecuación

$$\rho''\rho - 2\rho'^2 - \rho^2 = 0. \quad (2.21)$$

Ahora sólo falta probar que las soluciones de la ecuación diferencial anterior vienen dadas por funciones de la forma $a \sec(t+t_0)$, siendo $a \neq 0$ y t_0 constantes. La resolución será algo tediosa: transformaremos la ecuación en una ecuación de Bernoulli, haremos un cambio de variables para transformarla en una ecuación diferencial ordinaria lineal y finalmente resolveremos ésta última calculando primero la solución de la ecuación lineal homogénea asociada y después usando el método de variación de constantes.

Sea $w = w(\rho) = \rho'$. Usando la regla de la cadena,

$$\rho'' = \frac{dw(\rho)}{dt} = \frac{dw(\rho)}{d\rho} \frac{d\rho}{dt} = \frac{dw(\rho)}{d\rho} \rho' = \frac{dw}{d\rho} w.$$

Expresamos ahora la ecuación (2.21) en términos de $w(\rho)$:

$$\frac{dw(\rho)}{d\rho} w(\rho) \rho - 2w(\rho)^2 - \rho^2 = 0. \quad (2.22)$$

Dividimos la igualdad por $w(\rho)\rho$ (que no es 0 puesto que ni ρ ni su derivada son nulas, ya que ρ no tiene un valor constante), quedando

$$\frac{dw(\rho)}{d\rho} - 2\frac{w(\rho)}{\rho} - \frac{\rho}{w(\rho)} = 0, \quad (2.23)$$

que es una ecuación de Bernoulli para $\alpha_0 = -1$. En consecuencia, hacemos un cambio de variables con $z = z(\rho) = w^{1-\alpha_0} = w^2$, cuya derivada es $z' = z'(\rho) = 2ww'$.⁵ Expresando (2.22) en términos de z y z' , queda

$$\frac{1}{2}z'\rho - 2z - \rho^2 = 0,$$

que es equivalente a la ecuación diferencial ordinaria lineal

$$z' - 4\frac{z}{\rho} - 2\rho = 0. \quad (2.24)$$

Su ecuación lineal homogénea asociada es $H_0 : z' - 4z/\rho = 0$, que es fácilmente resoluble al ser separable:

$$\frac{z'}{z} = \frac{dz}{dz} \frac{1}{z} = \frac{4}{\rho} \Rightarrow \int \frac{dz}{z} = \int \frac{4d\rho}{\rho} \Rightarrow \ln(z) = 4\ln(\rho) + C.$$

Por tanto, la solución de H_0 será $z_0(\rho) = C\rho^4$. Aplicando el método de variación de constantes, se sigue que la solución de (2.24) tendrá la forma $z = C(\rho)\rho^4$, siendo $C(\rho)$

⁵Para simplificar, vamos a denotar con un apóstrofe las derivadas con respecto a ρ de las funciones $w(\rho)$ y $z(\rho)$.

una función a encontrar. Sustituyendo z y su derivada $z' = C'(\rho)\rho^4 + 4C(\rho)\rho^3$ en la ecuación (2.24) queda

$$C''(\rho)\rho^4 + 4C(\rho)\rho^3 - 4\frac{C(\rho)\rho^4}{\rho} - 2\rho = C'(\rho)\rho^4 - 2\rho = 0.$$

$C(\rho)$ verificará entonces $C'(\rho) = 2\rho^{-3}$, luego integrando

$$C(\rho) = \frac{2\rho^{-2}}{-2} + c_1 = -\frac{1}{\rho^2} + c_1.$$

Queda entonces que $z = (c_1 - \rho^{-2})\rho^4 = \rho^2(c_1\rho^2 - 1)$. Deshaciendo el cambio de variables $z = w^2$, llegamos a que $w = \pm\rho\sqrt{c_1\rho^2 - 1}$. Como teníamos que $w = \rho'$, podemos integrar para obtener una expresión implícita de ρ :

$$\rho' = \frac{d\rho(t)}{dt} = \pm\rho\sqrt{c_1\rho^2 - 1} \Rightarrow \int \frac{d\rho}{\rho\sqrt{c_1\rho^2 - 1}} = \pm \int dt.$$

Usaremos un cambio de variables para resolver la integral de la izquierda:

$$u = \sqrt{c_1\rho^2 - 1}, du = \frac{c_1\rho}{\sqrt{c_1\rho^2 - 1}}d\rho.$$

Como $u^2 + 1 = c_1\rho^2$, es fácil ver que

$$\int \frac{d\rho}{\rho\sqrt{c_1\rho^2 - 1}} = \int \frac{1}{u^2 + 1} du = \arctg(u) + c_2 = \arctg(\sqrt{c_1\rho^2 - 1}) + c_2.$$

Hemos llegado por tanto a la siguiente ecuación implícita:

$$\arctg(\sqrt{c_1\rho(t)^2 - 1}) = \pm t + c_2. \quad (2.25)$$

Vamos a encontrar ahora una expresión explícita de $\rho(t)$. Aplicamos la función tangente a ambos lados de la igualdad y después elevamos al cuadrado:

$$\sqrt{c_1\rho(t)^2 - 1} = \tan(\pm t + c_2),$$

$$c_1\rho(t)^2 - 1 = \tan^2(\pm t + c_2) = \sec^2(\pm t + c_2) - 1.$$

Despejando $\rho(t)$, obtenemos que las funciones

$$\rho(t) = \frac{1}{\sqrt{c_1}} \sec(\pm t + c_2), \quad (2.26)$$

son las soluciones que estábamos buscando. Sin más que renombrar $a = 1/\sqrt{c_1}$ y teniendo en cuenta que la función secante es par, reescribimos las soluciones como $\rho(t) = a \sec(t + t_0)$. En conclusión, la curva α es rectificante si y solo si $\alpha(t) = \rho(t)\mathbf{y}(t) = a \sec(t + t_0)\mathbf{y}(t)$, con lo que ya hemos probado el teorema. \square

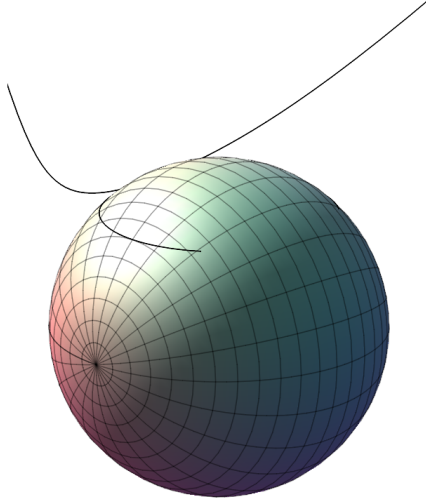


Figura 2.3: Representamos la c.r.p.n. $\mathbf{y} : (-\pi/2, \pi/2) \mapsto S^2$ que a cada t le asigna $(\frac{\sqrt{2}}{2}\cos(\frac{2t}{\sqrt{2}}), \frac{\sqrt{2}}{2}\sin(\frac{2t}{\sqrt{2}}), \frac{\sqrt{2}}{2})$ y la curva rectificante $\alpha(t) = \sec(t)\mathbf{y}(t)$, esta última representada solo para $t \in (-\frac{2\pi}{5}, \frac{2\pi}{5})$.

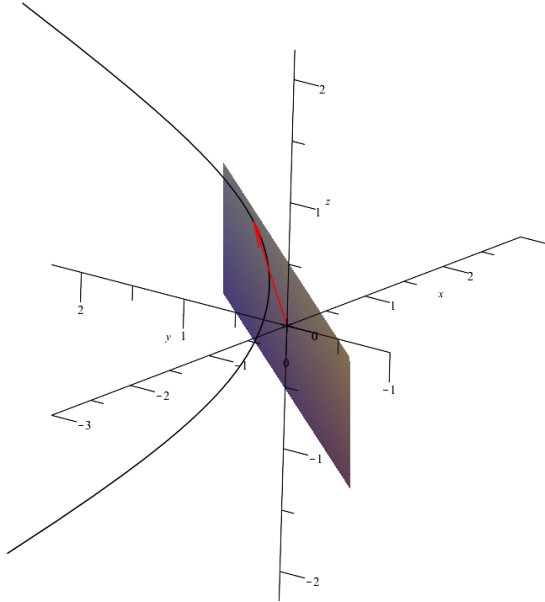


Figura 2.4: Representamos la curva α de la figura anterior, con el vector $\alpha(1/2)$ contenido en el plano rectificante de α para $t = 1/2$.

2.3. Curvas Rectificantes como Centroides.

Pueden establecerse nuevas propiedades que ponen a las curvas rectificantes en conexión con su vector de Darboux.

Definición 2.3.1. Sea α una curva regular en \mathbb{R}^3 con curvatura $k \neq 0$. Se define el centroide de α como la curva dada por el vector de Darboux $\mathbf{d} = \tau \mathbf{t} + k \mathbf{b}$ asociado a α .

El siguiente teorema establece una relación sencilla entre los centroides y las curvas rectificantes. Además, a partir de él se obtendrán nuevos resultados de interés.

Teorema 2.3.2. El centroide de una c.r.p.n. con curvatura k constante distinta de cero y torsión $\tau \neq \text{cte}$ es una curva rectificante. Recíprocamente, toda curva rectificante es el centroide de una c.r.p.n. con curvatura constante distinta de cero y torsión no constante.

Demostración. Sea $\alpha = \alpha(s)$ una c.r.p.n. con curvatura constante distinta de cero y torsión no constante. Consideremos su centroide

$$\mathbf{d}(s) = \tau(s)\mathbf{t}(s) + k(s)\mathbf{b}(s). \quad (2.27)$$

Derivando y aplicando las ecuaciones de Frenet-Serret, se tiene que

$$\mathbf{d}'(s) = \tau'(s)\mathbf{t}(s) + \tau(s)k(s)\mathbf{n}(s) - k(s)\tau(s)\mathbf{n}(s) = \tau'(s)\mathbf{t}(s),$$

lo que implica que los campos de vectores tangentes unitarios de \mathbf{d} y α son paralelos en cada punto s . Derivando de nuevo, se tiene por la primera ecuación de Frenet-Serret que el campo normal principal de \mathbf{d} es paralelo al de α , y por tanto también el binormal. Consecuentemente,

$$\mathbf{d}(s) = \lambda(s)\mathbf{t}_d(s) + \mu(s)\mathbf{b}_d(s), \quad (2.28)$$

luego el centroide \mathbf{d} es una curva rectificante.

Recíprocamente, sea $\alpha = \alpha(s)$ una curva rectificante parametrizada naturalmente. Entonces, por el Teorema 2.1.8 sabemos que $\tau_\alpha/k_\alpha = (s+b)/a$. Sin pérdida de generalidad⁶, podemos asumir entonces

$$k_\alpha = \frac{c\tau_\alpha}{s}. \quad (2.29)$$

⁶Hacemos el cambio de parámetros $\hat{s} = s - b$. Reescribimos $\hat{s} = s$, ya que ambos son parámetros naturales de la curva α . Además tomamos $c = 1/a$.

Sea $f(s) = \frac{1}{c} \int_{s_0}^s k_\alpha du = \frac{k_\alpha}{c} s - \frac{k_\alpha s_0}{c}$, $f'(s) = k_\alpha/c$. La función $g = f^{-1}$ existe al ser f una recta y viene dada por $g(t) = \frac{c}{k_\alpha} t + s_0$. En efecto,

$$(f \circ g)(x) = \frac{k_\alpha}{c} \left(\frac{c}{k_\alpha} x + s_0 \right) - \frac{k_\alpha}{c} s_0 = x = \frac{c}{k_\alpha} \left(\frac{k_\alpha}{c} x - \frac{k_\alpha s_0}{c} \right) + s_0 = (g \circ f)(x).$$

Hay que tener en cuenta que, si t denota la variable de g , como f y g son inversas la una de la otra, se tiene que $f(s) = t$ y, por tanto:

$$\frac{dt}{ds} = f'(s).$$

Ahora, aplicando el teorema fundamental de curvas en el espacio, existe una c.r.p.n. $\beta = \beta(t)$ con curvatura y torsión $k_\beta(t) = c$ y $\tau_\beta(t) = g(t)$.

Consideremos el centroide de β , dado por $\mathbf{d}_\beta(t) = g(t)\mathbf{t}_\beta(t) + c\mathbf{b}_\beta(t)$, y su reparametrización $\gamma(s) = \mathbf{d}_\beta(f(s))$. Entonces, como $g(f(s)) = s$,

$$\gamma(s) = s\mathbf{t}_\beta(f(s)) + c\mathbf{b}_\beta(f(s)). \quad (2.30)$$

Nuestro objetivo es demostrar que γ es congruente a α mediante el Teorema Fundamental de Curvas Alabeadas, lo que precisará obtener previamente su curvatura y su torsión. Para ello, empezamos por calcular $\gamma'(s)$. Como el parámetro natural de β es t , usando las ecuaciones de Frenet Serret y aplicandole la regla de la cadena a \mathbf{t}_β y \mathbf{b}_β ,

$$\frac{d\mathbf{t}_\beta(f(s))}{ds} = \frac{d\mathbf{t}_\beta(f(s))}{dt} \frac{dt}{ds} = k_\beta(f(s))\mathbf{n}_\beta(f(s))f'(s),$$

y

$$\frac{d\mathbf{b}_\beta(f(s))}{ds} = \frac{d\mathbf{b}_\beta(f(s))}{dt} \frac{dt}{ds} = -\tau_\beta(f(s))\mathbf{n}_\beta(f(s))f'(s).$$

En consecuencia:

$$\gamma'(s) = \mathbf{t}_\beta(f(s)) + sk_\beta(f(s))\mathbf{n}_\beta(f(s))f'(s) - c\tau_\beta(f(s))\mathbf{n}_\beta(f(s))f'(s),$$

pero $k_\beta(f(s)) = c$ y $\tau_\beta(f(s)) = g(f(s)) = s$, con lo que $\gamma'(s) = \mathbf{t}_\beta(f(s))$. Se tiene pues que γ está parametrizada naturalmente y $\mathbf{t}_\gamma(s) = \mathbf{t}_\beta(f(s))$.

Ya que s es el parámetro natural de γ , se sabe que $k_\gamma(s) = |\gamma''(s)|$. Como

$$\gamma''(s) = k_\beta(f(s))\mathbf{n}_\beta(f(s))f'(s) = cf'(s)\mathbf{n}_\beta(f(s)) = k_\alpha\mathbf{n}_\beta(f(s)),$$

se tiene que $k_\gamma(s) = k_\alpha(s)$.

Además, dado que $\tau_\gamma(s) = \frac{(\gamma'(s), \gamma''(s), \gamma'''(s))}{k_\gamma^2}$ y $k'_\alpha(s) = cf''(s) = 0$, se obtiene:

$$\begin{aligned}\gamma'''(s) &= k_\alpha(s) \frac{d\mathbf{n}_\beta(f(s))}{ds} = k_\alpha(s) \frac{d\mathbf{n}_\beta(f(s))}{dt} \frac{dt}{ds} = \\ k_\alpha(s) f'(s) (-k_\beta(f(s)) \mathbf{t}_\beta(f(s)) + \tau_\beta(f(s)) \mathbf{b}_\beta(f(s))) &= \frac{k_\alpha^2(s)}{c} (-c \mathbf{t}_\beta(f(s)) + s \mathbf{b}_\beta(f(s))).\end{aligned}$$

Veamos que $\tau_\gamma = \tau_\alpha$. En efecto

$$(\gamma', \gamma'', \gamma''') = \gamma' \cdot (\gamma'' \times \gamma''') = \mathbf{t}_\beta(f(s)) \cdot k_\alpha^3(\mathbf{b}_\beta(f(s)) + s c \mathbf{t}_\beta(f(s))) = s c k_\alpha^3(s).$$

Como $k_\gamma(s) = k_\alpha(s)$, se tiene que $\tau_\gamma(s) = s c k_\alpha(s)$ y se sigue finalmente de (2.29) que $\tau_\gamma = \tau_\alpha$.

Por tanto, las c.r.p.n. $\alpha(s)$ y $\gamma(s)$ tienen las mismas funciones curvatura y torsión, y también el mismo parámetro natural: s . Por el Teorema Fundamental de Curvas en el Espacio, α es congruente a γ , luego α es (salvo traslación) el centroide de una curva con curvatura constante distinta de cero y torsión no constante: el centroide de $\beta(f(s))$. \square

La curva α del teorema puede ser reemplazada por una curva con torsión constante distinta de cero y curvatura no constante. De hecho, se tiene el siguiente resultado, del que no daremos la prueba por ser análoga a la anterior:

Teorema 2.3.3. *El centroide de una c.r.p.n. con torsión τ constante distinta de cero y curvatura $k \neq \text{cte}$ es una curva rectificante. Recíprocamente, toda curva rectificante es el centroide de una c.r.p.n. con curvatura torsión distinta de cero y curvatura no constante.*

Corolario 2.3.4. *El centroide de una curva con curvatura y torsión constantes y distintas de cero es un punto.*

Demostración. Tenemos que el centroide $\mathbf{d}(s) = \tau \mathbf{t}(s) + k \mathbf{b}(s)$. Por las ecuaciones de Frenet-Serret, se tiene que $\mathbf{d}'(s) = \tau k \mathbf{n}(s) - k \tau \mathbf{n}(s) = \mathbf{0}$, luego \mathbf{d} es constante, es decir, un punto. \square

Para cerrar la sección, damos una última definición que nos servirá para construir nuevas curvas rectificantes en las condiciones de los dos teoremas anteriores.

Definición 2.3.5. *Para una curva regular α con curvatura $k \neq 0$, se definen sus cocentroides como las curvas $\mathbf{C}_\pm = \alpha \pm \mathbf{d}$.*

Supongamos que α es una curva rectificante con curvatura constante no nula y torsión no constante (o bien con curvatura no constante y torsión constante no nula). Bajo estas condiciones, por 2.3.2 y 2.3.3 el centroide \mathbf{d} es una curva rectificante. Como la suma -o diferencia- de curvas rectificantes es otra curva rectificante, los cocentroides de α serán curvas rectificantes.

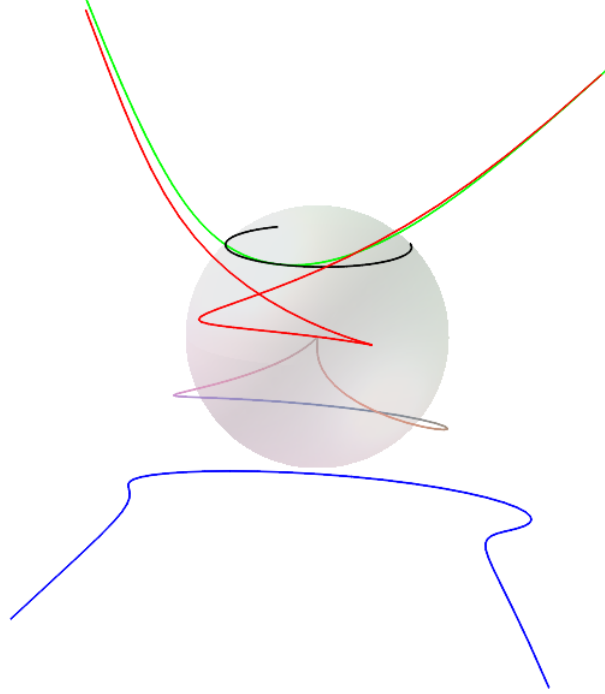


Figura 2.5: Se representan las curvas \mathbf{y} y α de la Figura 2.3, en negro y verde respectivamente. También aparecen en esta figura el centroide \mathbf{d} de α en colores degradados y sus cocentroides \mathbf{C}_+ y \mathbf{C}_- en rojo y azul. Tanto α como sus cocentroides están representados para $t \in (-\frac{2\pi}{5}, \frac{2\pi}{5})$. Ni el centroide ni los cocentroides son curvas rectificantes al no cumplir α las hipótesis de 2.3.2 o de 2.3.3.

2.4. Curvas rectificantes como curvas extremales.

Supongamos que tenemos una curva α dada por $\alpha = \rho \mathbf{y}$ para una función ρ y una curva $\mathbf{y} \in S^2$. Diremos que α es una **curva sobre \mathbf{y}** y que \mathbf{y} es la **proyección esférica** de α . Ejemplos de curvas sobre otra curva \mathbf{y} contenida en una esfera son las curvas $\alpha(t) = a \sec(t + t_0) \mathbf{y}(t)$ que vimos en el Teorema de Caracterización de Curvas Rectificantes.

El resultado central de esta sección muestra una desigualdad que se cumple para todo el conjunto de las curvas con igual proyección esférica \mathbf{y} , siendo las curvas rectificantes las únicas donde se alcanza la igualdad, es decir, las **curvas extremales** para la desigualdad anterior. Es en este sentido en el que vamos a ver las curvas rectificantes como curvas extremales.

Teorema 2.4.1. *Sea $\mathbf{y} = \mathbf{y}(t)$ una c.r.p.n. contenida en S^2 . Entonces, para cualquier función positiva $\rho = \rho(t)$, la curvatura k , la velocidad v de $\alpha = \rho \mathbf{y}$ y la curvatura*

geodésica k_g de \mathbf{y} satisfacen la desigualdad

$$k_g^2 \leq \frac{v^4 k^2}{\rho^2}. \quad (2.31)$$

Además, se alcanza la igualdad si y solo si α es una curva rectificante.

Demostración. Sean $\mathbf{y} = \mathbf{y}(t)$ una c.r.p.n. contenida en S^2 y ρ una función positiva. Sabemos por (1.4) que $\mathbf{y}'' = k_n \mathbf{N} + k_g \mathbf{S}$, que en nuestro caso se escribe $\mathbf{y}'' = -\mathbf{y} + k_g(\mathbf{y} \times \mathbf{y}')$ por (2.17). Como $S = \mathbf{y} \times \mathbf{y}'$ es perpendicular a $\alpha' = \rho' \mathbf{y} + \rho \mathbf{y}'$, que a su vez es paralelo a \mathbf{t} , se tiene que

$$\mathbf{y} \times \mathbf{y}' = \cos(\gamma) \mathbf{n} + \sin(\gamma) \mathbf{b}, \quad (2.32)$$

para alguna función γ .

Derivando, el lado izquierdo queda $\mathbf{y}' \times \mathbf{y}' + \mathbf{y} \times \mathbf{y}'' = \mathbf{y} \times (-\mathbf{y} + k_g(\mathbf{y} \times \mathbf{y}')) = \mathbf{y} \times k_g(\mathbf{y} \times \mathbf{y}')$, que por ser un triple producto vectorial⁷ es igual a $k_g(\mathbf{y}(\mathbf{y} \cdot \mathbf{y}') - \mathbf{y}'(\mathbf{y} \cdot \mathbf{y})) = -k_g \mathbf{y}'$ porque por estar \mathbf{y} contenida en la esfera $\mathbf{y} \cdot \mathbf{y} = 1$ y derivando $\mathbf{y} \cdot \mathbf{y}' = 0$.

Haciendo como en secciones anteriores uso de la regla de la cadena y las ecuaciones de Frenet-Serret, el lado derecho de la igualdad queda al derivar como

$$\begin{aligned} & -\gamma' \sin(\gamma) \mathbf{n} + \cos(\gamma)(-k \mathbf{t} + \tau \mathbf{b})v + \gamma' \cos(\gamma) \mathbf{b} - \tau v \sin(\gamma) \mathbf{n} = \\ & (-\tau v - \gamma')(\sin(\gamma) \mathbf{n} - \cos(\gamma) \mathbf{b}) - vk \cos(\gamma) \mathbf{t}. \end{aligned}$$

Por tanto, multiplicando por menos uno e igualando el lado izquierdo al derecho

$$k_g \mathbf{y}' = vk \cos(\gamma) \mathbf{t} + (\tau v + \gamma')(\sin(\gamma) \mathbf{n} - \cos(\gamma) \mathbf{b}). \quad (2.33)$$

Dado que $\mathbf{y}' \times (\mathbf{y} \times \mathbf{y}') = \mathbf{y}(\mathbf{y}' \cdot \mathbf{y}') - \mathbf{y}'(\mathbf{y}' \cdot \mathbf{y}) = \mathbf{y}$, multiplicando la igualdad anterior vectorialmente por $(\mathbf{y} \times \mathbf{y}')$ tenemos

$$\begin{aligned} k_g \mathbf{y} &= vk \cos(\gamma)(\cos(\gamma) \mathbf{b} - \sin(\gamma) \mathbf{n}) + (\gamma' + v\tau)(\sin^2(\gamma) \mathbf{t} + \cos^2(\gamma) \mathbf{t}), \text{ así que} \\ k_g \mathbf{y} &= (\gamma' + v\tau) \mathbf{t} - vk \cos(\gamma) (\sin(\gamma) \mathbf{n} - \cos(\gamma) \mathbf{b}). \end{aligned} \quad (2.34)$$

Por otro lado tenemos que $\mathbf{t} = (\rho' \mathbf{y} + \rho \mathbf{y}')/v$, por lo que $\mathbf{y} \cdot \mathbf{t} = \rho'/v$. Así, si multiplicamos (2.34) escalarmente por \mathbf{t} se tiene $k_g \rho'/v = (\gamma' + v\tau)$. Sustituyendo esta expresión en (2.34) y (2.33) y multiplicando por v resulta

$$vk_g \mathbf{y} = \rho' k_g \mathbf{t} - v^2 k \cos(\gamma) (\sin(\gamma) \mathbf{n} - \cos(\gamma) \mathbf{b}),$$

⁷Utilizamos la propiedad $\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{B}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}) - \mathbf{C}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})$. Además, esta propiedad también implica la identidad $(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \times \mathbf{C} = -\mathbf{C} \times (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \mathbf{B}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}) - \mathbf{A}(\mathbf{B} \cdot \mathbf{C})$.

$$vk_g \mathbf{y}' = v^2 k \cos(\gamma) \mathbf{t} + \rho' k_g (\sin(\gamma) \mathbf{n} - \cos(\gamma) \mathbf{b}).$$

Multiplicando vectorialmente estas igualdades y teniendo en cuenta (2.32), se tiene que

$$v^2 k_g^2 (\cos(\gamma) \mathbf{n} + \sin(\gamma) \mathbf{b}) = \rho'^2 k_g^2 (\sin(\gamma) \mathbf{b} + \cos(\gamma) \mathbf{n}) + v^4 k^2 \cos^2(\gamma) (\sin(\gamma) \mathbf{b} + \cos(\gamma) \mathbf{n}),$$

y teniendo en cuenta que $v^2 = \rho^2 + \rho'^2$,

$$\rho^2 k_g^2 (\cos(\gamma) \mathbf{n} + \sin(\gamma) \mathbf{b}) = v^4 k^2 \cos^2(\gamma) (\cos(\gamma) \mathbf{n} + \sin(\gamma) \mathbf{b}),$$

de donde se deduce inmediatamente

$$\rho^2 k_g^2 = v^4 k^2 \cos^2(\gamma), \quad (2.35)$$

Esto a su vez implica la desigualdad (2.31), con lo que ya hemos probado la primera parte del teorema.

Es evidente que la igualdad se alcanzará en (2.31) si y solo si $\cos^2(\gamma) = 1$, que a su vez sucede si y solo si $\sin(\gamma) = 0$. Sustituyendo en (2.32), que se alcance la igualdad equivale a que $\mathbf{y} \times \mathbf{y}' = \pm \mathbf{n}$.

Veamos que esto ocurrirá si y solo si α es una curva rectificante. Por ser $\alpha = \rho \mathbf{y}$, se tiene

$$\alpha' = \rho' \mathbf{y} + \rho \mathbf{y}', \quad \alpha'' = \rho'' \mathbf{y} + 2\rho' \mathbf{y}' + \rho \mathbf{y}'',$$

lo que supone que⁸

$$\begin{aligned} (\alpha' \times \alpha'') \times \alpha' &= (\alpha' \cdot \alpha') \alpha'' - (\alpha' \cdot \alpha'') \alpha' = (\rho'^2 + \rho^2) \alpha'' - (\rho' \rho'' + 2\rho \rho' - \rho' \rho) \alpha' = \\ &= ((\rho'^2 + \rho^2) \rho'' - (\rho' \rho'' + \rho \rho') \rho') \mathbf{y} + ((\rho'^2 + \rho^2) 2\rho' - (\rho' \rho'' + \rho \rho') \rho) \mathbf{y}' + (\rho'^2 + \rho^2) \rho \mathbf{y}'' \\ &= (\rho^2 \rho'' - \rho \rho'^2) \mathbf{y} + \rho' (\rho^2 + 2\rho'^2 - \rho \rho'') \mathbf{y}' + \rho (\rho'^2 + \rho^2) \mathbf{y}''. \end{aligned}$$

Si recordamos que $\mathbf{y}'' = -\mathbf{y} + k_g(\mathbf{y} \times \mathbf{y}')$, al sustituir queda

$$(\rho^2 \rho'' - \rho \rho'^2 - \rho (\rho'^2 + \rho^2)) \mathbf{y} - \rho' (\rho \rho'' - 2\rho'^2 - \rho^2) \mathbf{y}' + \rho (\rho'^2 + \rho^2) k_g \mathbf{y} \times \mathbf{y}'.$$

Así, tenemos

$$(\alpha' \times \alpha'') \times \alpha' = (\rho \rho'' - 2\rho'^2 - \rho^2) (\rho \mathbf{y} - \rho' \mathbf{y}') + \rho (\rho'^2 + \rho^2) k_g \mathbf{y} \times \mathbf{y}' \quad (2.36)$$

Como el campo vectorial binormal \mathbf{b} de α es paralelo a $\alpha' \times \alpha''$ ⁹ y α' es paralelo a \mathbf{t} , está claro que $(\alpha' \times \alpha'') \times \alpha'$ es paralelo al campo vectorial normal \mathbf{n} de α . Por consiguiente, (2.36) implica que \mathbf{n} será paralelo a $\mathbf{y} \times \mathbf{y}'$ si y solo si $\rho \rho'' - 2\rho'^2 - \rho^2 = 0$.

⁸Se usa que $\mathbf{y} \cdot \mathbf{y}'' = -1$ e $\mathbf{y}' \cdot \mathbf{y}'' = 0$, identidades que se obtienen derivando los productos escalares $\mathbf{y} \cdot \mathbf{y}' = 0$ e $\mathbf{y}' \cdot \mathbf{y}' = 1$.

⁹En efecto, por las ecuaciones de Frenet y la regla de la cadena $\alpha' \times \alpha''$ es paralelo a $\mathbf{t} \times k \mathbf{n} = k \mathbf{b}$.

Sabemos por la demostración del Teorema 2.2.2 que las soluciones de esta ecuación son las funciones $\rho(t) = a \sec(t + t_0)$. Por este mismo teorema, $\alpha = \rho \mathbf{y}$ será una curva rectificante si y solo si \mathbf{n} es paralelo a $\mathbf{y} \times \mathbf{y}'$. Además, si estos dos vectores son paralelos, por ser $|\mathbf{y}| = |\mathbf{y}'| = 1$, $\mathbf{y} \times \mathbf{y}' = \pm \mathbf{n}$. En consecuencia, las únicas curvas con las que se alcanza la igualdad en (2.31) son las curvas rectificantes. \square

Ejemplo 2.4.2. Sea $\mathbf{y} : (-\pi/2, \pi/2) \rightarrow \mathbb{R}^3 : t \mapsto (\cos(t), \sin(t), 0)$. Evidentemente, \mathbf{y} está contenida en S^2 . Además, $\mathbf{y}' = (-\sin(t), \cos(t), 0) = \mathbf{t}_{\mathbf{y}}$ porque está parametrizada naturalmente y, si expresamos $\mathbf{y}'' = k_n \mathbf{N} + k_g \mathbf{S}$, es evidente que $\mathbf{y} = N$ y que $\mathbf{y}'' = -\mathbf{y}$, por lo que $k_n = 1$ y $k_g = 0$ ¹⁰ y la desigualdad (2.31) queda como $0 \leq v^4 k^2 / \rho^2$ para todas las curvas sobre \mathbf{y} . Si tomamos la curva rectificante $\alpha(t) = \sec(t) \mathbf{y}(t) = (\tan(t), 1, 0)$, su primera derivada es $\alpha'(t) = (\sec^2(t), 0, 0)$, así que $v = \sec^2(t)$. Como sabemos que se tiene que alcanzar la igualdad en (2.31), k tendrá que ser idénticamente nula, pero esto es trivial al ser α una recta.

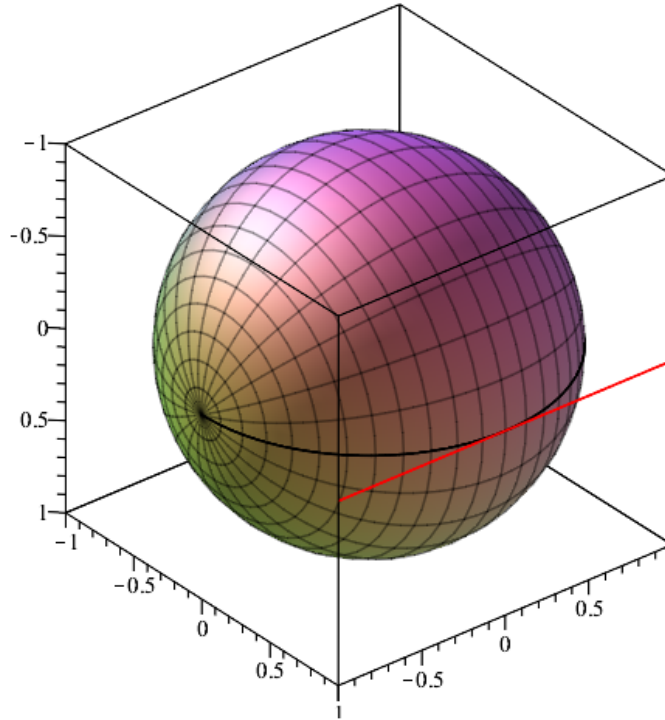


Figura 2.6: Están representadas la curva \mathbf{y} sobre la esfera y la curva α , esta última para $t \in (-\pi/4, \pi/4)$.

¹⁰De hecho, toda circunferencia maximal en una esfera tiene curvatura geodésica nula.

Corolario 2.4.3. *Una curva regular α en \mathbb{R}^3 tiene curvatura constante distinta de cero y torsión lineal en términos de la longitud de arco s si y solo si α es congruente con una curva rectificante sobre una c.r.p.n. \mathbf{y} en S^2 con curvatura geodésica $k_g = c \sec^3(t)$ para alguna constante c distinta de cero.*

Demostración. Sea α una c.r.p.n. con curvatura constante distinta de cero y torsión lineal en términos del parámetro natural s . Bajo estas condiciones, por el Teorema 2.1.8 sabemos que α es congruente a una curva rectificante. Por tanto, si le aplicamos una traslación a la curva α y también hacemos una traslación en su parámetro t , queda -abusando de la notación- $\alpha(t) = a \sec(t) \mathbf{y}(t)$ para alguna c.r.p.n. \mathbf{y} en S^2 por el Teorema de Caracterización de las Curvas Rectificantes 2.2.2. Sabemos que $\rho(t) = a \sec(t)$. Como $\alpha'(t) = a \tan(t) \sec(t) \mathbf{y} + a \sec(t) \mathbf{y}'$,

$$v^2 = |\alpha'(t)|^2 = a^2 \tan^2(t) \sec^2(t) + a^2 \sec^2(t) = a^2 \sec^2(t) (\tan^2(t) + 1) = a^2 \sec^4(t),$$

y por tanto $v^4/\rho^2 = a^2 \sec^6(t)$. Como α es rectificante, aplicando el Teorema (2.4.1.), $k_g^2 = a^2 k^2 \sec^6(t)$, por lo que $k_g = c \sec^3(t)$ con $c = ak$ o bien $c = -ak$.

Recíprocamente, si α es una curva rectificante sobre una c.r.p.n. \mathbf{y} en S^2 , entonces $\alpha(t) = a \sec(t + t_0) \mathbf{y}(t)$ para alguna constante a distinta de cero. Con el mismo argumento que en la implicación anterior, se tiene $v^4/\rho^2 = a^2 \sec^6(t + t_0)$.

Partimos además de que la curvatura geodésica de \mathbf{y} es $k_g = c \sec^3(t)$ con $c \neq 0$. Como α es una curva rectificante, el Teorema 2.4.1 implica que $k_g = v^4 k^2 / \rho^2$. Igualando las dos expresiones de la curvatura geodésica de \mathbf{y} , tenemos que $k^2 = c^2 / a^2$. Esto implica por el Teorema 2.1.8 que la torsión de α es lineal en términos de la longitud de arco s . \square

2.5. Otras propiedades de las curvas rectificantes.

Terminamos el capítulo con una proposición que establece varias condiciones que equivalen a que una curva sea rectificante. Hacen falta antes algunas definiciones.

Definiciones 2.5.1. *Dada una curva \mathbf{y} en S^2 y una función positiva ρ , a la curva $\hat{\alpha} = \mathbf{y}/\rho$ se denomina curva **recíproca** de $\alpha = \rho \mathbf{y}$.*

Dada una curva γ , definimos $\gamma^ = \gamma \times \mathbf{t}_\gamma$ como la **curva dual** de γ .*

Recordamos además que la indicatriz esférica de α no es más que la curva contenida en la esfera unidad definida por su campo vectorial tangente. También se le llama **aplicación de Gauss**, razón por la cual en el teorema se le denota como G .

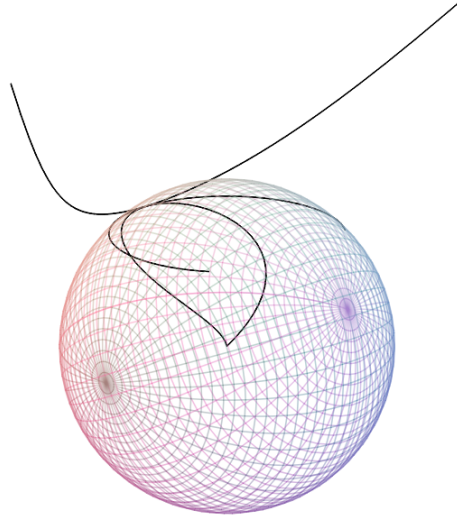


Figura 2.7: La curva rectificante de la Figura 2.3, con su proyección esférica y su curva recíproca.

Proposición 2.5.2. Sea $\mathbf{y} = \mathbf{y}(t)$ una c.r.p.n. contenida en S^2 y $\rho = \rho(t)$ una función positiva no constante. Entonces, son equivalentes:

- (a). La curva $\alpha = \rho\mathbf{y}$ es rectificante.
- (b). La curva $\hat{\alpha}$ tiene velocidad constante.
- (c). La curva α^* es esférica, esto es, $|\alpha^*|$ es una constante no nula.
- (d). El campo vectorial normal de α , \mathbf{n} , es paralelo al campo vectorial $\mathbf{y} \times \mathbf{y}'$.
- (e). La velocidad v de α es proporcional a ρ^2 .
- (f). La curva $\mathbf{y} \times \mathbf{y}'$ es tangente a la indicatriz esférica de α .
- (g). La velocidad v de α y la velocidad v_G de la indicatriz esférica de α satisfacen $vv_G = \rho k_g$.
- (h). La indicatriz esférica de α viene dada por $G(t) = \sin(t+t_0)\mathbf{y}(t) + \cos(t+t_0)\mathbf{y}'(t)$ para alguna constante t_0 .

Demostración. Sea \mathbf{y} una c.r.p.n. en S^2 y ρ una función positiva. Como la recíproca de $\alpha = \rho\mathbf{y}$ es $\hat{\alpha} = \mathbf{y}/\rho$, el vector velocidad de $\hat{\alpha}$ satisface

$$\hat{\alpha}' = -\frac{\rho'}{\rho^2}\mathbf{y} + \frac{1}{\rho}\mathbf{y}'.$$

Por tanto, $\hat{\alpha}$ tiene velocidad constante si y solo si ρ satisface

$$\left(\frac{\rho'}{\rho}\right) + \frac{1}{\rho^2} = \frac{1}{a^2} \quad (2.37)$$

para alguna constante $a \neq 0$. Como las soluciones de esta ecuación vienen dadas por $\rho(t) = \pm a \sec(t + b)$ con b constante, el Teorema de Caracterización de las Curvas Rectificantes 2.2.2 implica que (a) y (b) son equivalentes.

La equivalencia de (a) y (d) ya se ha probado en la demostración del Teorema 2.4.1.

Como $\alpha^* = \alpha \times \mathbf{t} = \rho \mathbf{y} \times (\rho' \mathbf{y} + \rho \mathbf{y}') \frac{1}{\sqrt{\rho'^2 + \rho^2}} = \frac{\rho^2}{\sqrt{\rho'^2 + \rho^2}} (\mathbf{y} \times \mathbf{y}')$, se tiene que $|\alpha^*| = \rho^2/v$, que será igual a una constante no nula si y solo si ρ^2 y v son proporcionales. Por tanto (c) y (e) son equivalentes.

Por otro lado $v = \sqrt{\rho^2 + \rho'^2}$ será proporcional a ρ^2 si y solo si ρ satisface la ecuación $\rho^2 = a\sqrt{\rho^2 + \rho'^2}$ para alguna constante $a \neq 0$. Como esta ecuación es equivalente a la ecuación (2.37), $\rho(t) = a \sec(t + b)$ para alguna constante b . Por el Teorema de Caracterización de Curvas Rectificantes, (a) es equivalente a (e).

Ya que $G = \mathbf{t}$, tenemos por la regla de la cadena y las ecuaciones de Frenet-Serret que $G' = vk\mathbf{n}$. Así, (d) y (f) son equivalentes. Además, $v_G = vk$. En consecuencia, $vv_G = k_g\rho$ si y solo si $v^2k = k_g\rho$. Por el Teorema 2.4.1, (a) y (g) son equivalentes.

Como $G = \mathbf{t}$,

$$G' = \frac{\rho'}{v} \mathbf{y} + \frac{\rho}{v} \mathbf{y}', \quad (2.38)$$

lo que significa que se tiene (h) si y solo si ρ satisface el siguiente sistema:

$$\rho = \sqrt{\rho^2 + \rho'^2} \cos(t + t_0), \quad \rho' = \sqrt{\rho^2 + \rho'^2} \sin(t + t_0). \quad (2.39)$$

Es fácil verificar que las soluciones no triviales de este sistema están dadas por $\rho(t) = a \sec(t + t_0)$ con $a \neq 0$ y t_0 constantes. Consecuentemente, los enunciados (a) y (h) son equivalentes. \square

Anexo: Códigos de Maple

Las siguientes líneas son necesarias para todas las figuras:

```
restart;
with(plots):
with(linalg):
```

Figura 2.1

```
x1 := t -> cos(t);
y1 := t -> 1-(1-sin(t))^2;
al := [x1(t), y1(t), 0];
alt := diff(al, t); alt2 := diff(alt, t);
alt3 := diff(alt2, t);
noralt := simplify(sqrt(alt[1]^2+alt[2]^2+alt[3]^2));
tg := evalm(alt/noralt);
b1 := simplify(crossprod(alt, alt2));
norb1 := simplify(sqrt(b1[1]^2+b1[2]^2+b1[3]^2));
b := evalm(b1/norb1);
n := simplify(crossprod(b, tg));
t0 := 1/2;
al0 := evalf(simplify(subs(t = t0, al(t))));
plt0 := simplify(det([[x1-x(t0), y1-y(t0), z1-z(t0)],
  evalf(simplify(subs(t = t0, alt(t)))), evalf(simplify(subs(t = t0, alt2(t)))])));
A := implicitplot3d(plt0, x1 = -2 .. 2, y1 = -3 .. 1, z1 = -1 .. 1, color = grey,
  scaling = constrained);
vect := arrow(eval(al, t = 1/2), shape = arrow, color = blue);
curva:=spacecurve(al(t),t=-Pi..Pi,thickness=3,color=red);
origen := pointplot3d([0, 0, 0], color = black, symbol = cross,axes=none);
display([A,curva,vect,origen]);
```

Figura 2.2

Para la primera imagen:

```
x1:=t->sqrt(1-t^2)*cos(5*Pi*t);
y1:=t->sqrt(1-t^2)*sin(5*Pi*t);
```

```

z1:=t->t;
al:=[x1(t),y1(t),z1(t)];
A:=spacecurve(al(t),t=-1..1,thickness=3,color=black,numpoints=400,axes=None);
B := plot3d([cos(y)*sin(x), sin(y)*sin(x), cos(x)], x = 0 .. Pi, y = 0 .. 2*Pi,
  style = line,axes=None);
origen := pointplot3d([0, 0, 0], color = black, symbol = cross,axes=None);
display([A, B]);

```

Para la segunda, usando el código anterior:

```

B := plot3d([cos(y)*sin(x), sin(y)*sin(x), cos(x)], x = 0 .. Pi, y = 0 .. 2*Pi,
  style = surface,axes=None,transparency=0.95);
alt:=diff(al,t);
p2t0:=simplify(dotprod(evalf(simplify(subs(t=t0,alt(t)))),
  [x-x1(t0),y-y1(t0),z-z1(t0)],'orthogonal'));
planormal:=implicitplot3d( p2t0,x=-2..2,y=-1.5..2,z=-1.3..1.3,
  color=blue,scaling=constrained,style=surface,color="LightGoldenrodYellow",
  axes=None);
vect := arrow(eval(0+al, t = 1/2), shape = arrow, color = red,axes=None);
origen := pointplot3d([0, 0, 0], color = black, symbol = cross,axes=None);
display([planormal,A,B,vect,origen]);

```

Figura 2.3

```

B := plot3d([cos(y)*sin(x), sin(y)*sin(x), cos(x)], x = 0 .. Pi, y = 0 .. 2*Pi,
  style = patch,axes=None);
bfy := spacecurve([(1/2)*sqrt(2)*cos(2*x/sqrt(2)), (1/2)*sqrt(2),
  (1/2)*sqrt(2)*sin(2*x/sqrt(2))], x = -(1/2)*Pi .. (1/2)*Pi, color = black,axes=None);
cr := spacecurve([(1/2)*sqrt(2)*cos(2*x/sqrt(2))/cos(x), sqrt(2)/(2*cos(x)),
  (1/2)*sqrt(2)*sin(2*x/sqrt(2))/cos(x)], x = -Pi/(2.5) .. Pi/(2.5), color = black,
  scaling = constrained);
display([B, cr, bfy]);

```

Figura 2.4

```

x1 := t -> (1/2)*sqrt(2)*cos(2*t/sqrt(2))/cos(t);
y1 := t -> (1/2)*sqrt(2)/cos(t);
z1 := t -> (1/2)*sqrt(2)*sin(2*t/sqrt(2))/cos(t);
al := [x1(t), y1(t), z1(t)];
alt := diff(al, t);
alt2 := diff(alt, t);
alt3 := diff(alt2, t);
noralt:=simplify(sqrt(alt[1]^2+alt[2]^2+alt[3]^2));
tg:=evalm(alt/noralt);
b1:=simplify(crossprod(alt,alt2));
norb1:=simplify(sqrt(b1[1]^2+b1[2]^2+b1[3]^2));
b:=evalm(b1/norb1);
n:=simplify(crossprod(b,tg));
t0:=1/2;
al0:=evalf(simplify(subs(t=t0,al(t))));

```

```
p3t0:=simplify(dotprod(evalf(simplify(subs(t=t0,n(t)))),
[x-x1(t0),y-y1(t0),z-z1(t0)],'orthogonal'));
G:=implicitplot3d( p3t0,x=-3..3,y=-1..1,z=-1..1,style=surface,
scaling=constrained,axes=none);
vect := arrow(eval(al, t = 1/2), shape = arrow, color = red,axes=none);
origen := pointplot3d([0, 0, 0], color = black, symbol = cross,axes=none);
display([G,cr,vect,origen]);
```

Figura 2.5

```
B := plot3d([cos(y)*sin(x), sin(y)*sin(x), cos(x)], x = 0 .. Pi, y = 0 .. 2*Pi,
style = surface, transparency = .7, axes = none);
bfy := spacecurve([(1/2)*sqrt(2)*cos(2*x/sqrt(2)), (1/2)*sqrt(2),
(1/2)*sqrt(2)*sin(2*x/sqrt(2))], x = -(1/2)*Pi .. (1/2)*Pi, color = black,axes=none);
cr := spacecurve([(1/2)*sqrt(2)*cos(2*x/sqrt(2))/cos(x), sqrt(2)/(2*cos(x)),
(1/2)*sqrt(2)*sin(2*x/sqrt(2))/cos(x)], x = -Pi/(2.5) .. Pi/(2.5), color = green,
scaling = constrained,axes=none);
```

Para esta parte hace falta haber cargado previamente el código de la Figura 2.4:

```
k := norb1/noralt^3
tau := det([alt, alt2, alt3])/norb1^2;
centroide := spacecurve(b*k+tau*tg, t = -(1/2)*Pi .. (1/2)*Pi, axes=none);
cocentroide1 := spacecurve(Vector[row](3, {(1) =
(1/2)*sqrt(2)*cos(2*t/sqrt(2))/cos(t)+cos(t)^3*(-(1/2)*cos(t)*sqrt(2)*cos(t*sqrt(2))
+2*sin(t*sqrt(2))*sin(t))-cos(t)^4*sin(t)*(sin(t*sqrt(2))^2+
cos(t*sqrt(2))^2*(-sin(t*sqrt(2))/cos(t)+(1/2)*sqrt(2)*cos(t*sqrt(2))*sin(t)/cos(t)^2),
(2) = (1/2)*sqrt(2)/cos(t)-(1/2)*cos(t)^4*sqrt(2)
-(1/2)*cos(t)^2*sin(t)^2*(sin(t*sqrt(2))^2+cos(t*sqrt(2))^2)*sqrt(2),
(3) = (1/2)*sqrt(2)*sin(2*t/sqrt(2))/cos(t)+cos(t)^3*(-
(1/2)*sin(t*sqrt(2))*cos(t)*sqrt(2)-2*cos(t*sqrt(2))*sin(t))-
cos(t)^4*sin(t)*(sin(t*sqrt(2))^2+cos(t*sqrt(2))^2)*(cos(t*sqrt(2))/cos(t)+
(1/2)*sqrt(2)*sin(t*sqrt(2))*sin(t)/cos(t)^2}), t = -Pi/(2.5) .. Pi/(2.5),
color = red, scaling = constrained,axes=none);
cocentroide2 := spacecurve(Vector[row](3, {(1) =
-(1/2)*sqrt(2)*cos(2*t/sqrt(2))/cos(t)+cos(t)^3*(-(1/2)*cos(t)*sqrt(2)*cos(t*sqrt(2))
+2*sin(t*sqrt(2))*sin(t))-cos(t)^4*sin(t)*(sin(t*sqrt(2))^2+
cos(t*sqrt(2))^2*(-sin(t*sqrt(2))/cos(t)+(1/2)*sqrt(2)*cos(t*sqrt(2))*sin(t)/cos(t)^2),
(2) = -(1/2)*sqrt(2)/cos(t)-(1/2)*cos(t)^4*sqrt(2)
-(1/2)*cos(t)^2*sin(t)^2*(sin(t*sqrt(2))^2+cos(t*sqrt(2))^2)*sqrt(2),
(3) = -(1/2)*sqrt(2)*sin(2*t/sqrt(2))/cos(t)+cos(t)^3*(-
(1/2)*sin(t*sqrt(2))*cos(t)*sqrt(2)-2*cos(t*sqrt(2))*sin(t))-
cos(t)^4*sin(t)*(sin(t*sqrt(2))^2+cos(t*sqrt(2))^2)*(cos(t*sqrt(2))/cos(t)+
(1/2)*sqrt(2)*sin(t*sqrt(2))*sin(t)/cos(t)^2}), t = -Pi/(2.5) .. Pi/(2.5),
color = blue, scaling = constrained,axes=none);
display([B,bfy,cr,centroide,cocentroide1,cocentroide2]);
```

Figura 2.6

```
A := spacecurve([cos(x), sin(x), 0], x = -(1/2)*Pi .. (1/2)*Pi, color = black);
C := spacecurve([1, tan(x), 0], x = -(1/4)*Pi .. (1/4)*Pi, color = red);
```

```
B := plot3d([cos(y)*sin(x), sin(y)*sin(x), cos(x)], x = 0 .. Pi, y = 0 .. 2*Pi,
  style = patch);
display([A,B,C]);
```

Figura 2.7

```
B := plot3d([cos(y)*sin(x), sin(y)*sin(x), cos(x)], x = 0 .. Pi, y = 0 .. 2*Pi,
  style = line, axes=None);
bfy := spacecurve([(1/2)*sqrt(2)*cos(2*x/sqrt(2)), (1/2)*sqrt(2),
  (1/2)*sqrt(2)*sin(2*x/sqrt(2))], x = -(1/2)*Pi .. (1/2)*Pi, color = black, axes=None);
cr := spacecurve([(1/2)*sqrt(2)*cos(2*x/sqrt(2))/cos(x), sqrt(2)/(2*cos(x)),
  (1/2)*sqrt(2)*sin(2*x/sqrt(2))/cos(x)], x = -Pi/(2.5) .. Pi/(2.5), color = black,
  scaling = constrained, axes=None);
crr := spacecurve([(1/2)*sqrt(2)*cos(2*x/sqrt(2))*cos(x), (1/2)*sqrt(2)*cos(x),
  (1/2)*sqrt(2)*sin(2*x/sqrt(2))*cos(x)], x = -(1/2)*Pi .. (1/2)*Pi,
  color = black, axes=None);
display([B,bfy,cr,crr]);
```

Bibliografía

- [1] Chen BY, *When does the position vector of a space curve always lie in its rectifying plane?*, Amer. Math. Monthly **110** (2003), 145-152.
- [2] Chen BY, *Rectifying curves and geodesics on a cone in the Euclidean 3-space*. Tamkang J. Math. **48** (2017), no. 2, 209-214.
- [3] Chen BY, Dillen F., *Rectifying Curves as Centrodes and Extremal Curves*. Bulletin of the Institute of Mathematics, Academia Sinica **33** (2005), no. 2, 77-90.
- [4] Do Carmo, M., *Differential Geometry of Curves and Surfaces*. Prentice-Hall, 1976
- [5] İlarslan, K., Nešović, E., *Some Characterizations of Rectifying Curves in the Euclidean Space \mathbb{R}^4* . Turk J Math. Vol. **32** (2008), 21-30.
- [6] İlarslan, K., Nešović, E., Petrović-Torgašev, M., *Some characterizations of rectifying curves in the Minkowski 3-space*. Novi Sad J. Math. Vol. **33** (2003), No. 2, 23-32.
- [7] Kim DS, Chung HS, Cho KH, *Space curves satisfying $\tau/k = as+b$* . Honam Math. J. **15** (1993), 1-9.
- [8] Laugwitz Detlef, *Differential and Riemannian Geometry*. Academic Press (1965), 1-18.
- [9] Millman, R. S., Parker, G. G., *Elements of Differential Geometry*. New Jersey: Prentice-Hall 1977.